Wurzeln im Reellen und im Komplexen

Ulrich Warnecke, Münster 18. 5. 2010, überarbeitet 2. 7. 2013

1. Wurzeln im Reellen

Für *ungerades* $n \in \mathbb{N}^*$ ($\overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ist die n-te Potenzfunktion auf $\mathbb{R}$ umkehrbar, für *gerades* $n \in \mathbb{N}^*$ dagegen nur die *Einschränkung* der n-ten Potenzfunktion auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ oder $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ oder Teilmengen dieser beiden Mengen. Dies lässt es wünschenswert erscheinen, zwecks Eindeutigkeit folgende Sprech- bzw. Schreibweisen einzuführen:

für gerades n: $\sqrt[n]{x}$, gelesen „n-te Wurzel ***aus*** x “, und für ungerades n: $\sqrt[n]{(x)}$, gelesen: „n-te Wurzel ***von*** x “,

wobei für $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ definiert wird:

$$\sqrt[2k+1]{(x)} \overset{\text{def}}{=} \text{sgn}(x) \cdot \sqrt[2k+1]{|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Demgegenüber sind $\sqrt[2k]{x}$ und $\sqrt[2k+1]{x}$ nur für $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definiert. Man darf nun z. B. die Lösung von $x^3 = -8$ als $\sqrt[3]{(-8)}$ notieren und verstößt dabei nicht gegen die Forderung, dass *unter* einer Wurzel niemals ein negativer Radikand stehen darf; denn -8 steht hier ja *außerhalb* der Wurzel.

Man kann jetzt einwandfrei schreiben ($\overset{-1}{f}$ wird gelesen „f oben minus 1“; $\overset{-1}{f} \neq f^{-1} = \frac{1}{f}$):

für ungerades n ist $\overset{-1}{f} = (x \mapsto \sqrt[n]{(x)})$ die Umkehrfunktion von $f = (x \mapsto x^n)$,
für gerades n ist $\overset{-1}{g} = (x \mapsto \sqrt[n]{x}\,)$ die Umkehrfunktion von $g = (x \mapsto x^n) \,\big|\, \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
und $\overset{-1}{h} = (x \mapsto -\sqrt[n]{x}\,)$ die Umkehrfunktion von $h = (x \mapsto x^n) \,\big|\, \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

(Wenn keine Einschränkung gemacht wird, soll die maximal mögliche Einsetzungsmenge für den Funktionsterm definitionsgemäß gleich der Definitionsmenge der Funktion sein.)

Man hat $\overset{-1}{f}(x) = \sqrt[2k+1]{(x)} = \text{sgn}(x) \cdot \sqrt[2k+1]{|x|} = \text{sgn}(x) \cdot \sqrt[2k+1]{x \cdot \text{sgn}(x)}$ für *alle* $x \in \mathbb{R}$, und mittels Ketten- und Produktregel findet man die Ableitung an jeder von Null verschiedenen Stelle x_0:

$$\begin{aligned}
(\overset{-1}{f})'(x_0) &= 0 + \text{sgn}(x_0) \cdot \frac{1}{(2k+1) \cdot \sqrt[2k+1]{(x_0 \cdot \text{sgn}(x_0))^{2k}}} \cdot \text{sgn}(x_0) \\
&= \frac{1}{(2k+1) \cdot \sqrt[2k+1]{x_0^{2k}}}.
\end{aligned}$$

Gelegentlich wird die Meinung vertreten – sogar von Mathematikern! – man dürfe z. B. $\sqrt[3]{-8}$ für die doch eindeutig bestimmte Lösung -2 der Gleichung $x^3 = -8$ schreiben, da ja $(-2)^3 = -8$ nur für -2 gilt. Ließe man unter Wurzeln mit ungeradem Wurzelindex negative Radikanden zu, käme man sofort in Konflikt mit Rechengesetzen für Wurzeln und erhielte:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2, \qquad \text{ein eklatanter Widerspruch!}$$

Deshalb sei ausdrücklich festgehalten:

Im Reellen sind auch unter Wurzeln mit *ungeradem* Wurzelindex *negatve* Radikanden *nicht zugelassen*!

2. Wurzeln mit ungeradem Wurzelindex im Komplexen
Beim Übergang ins Komplexe könnte man jetzt doch auf die Idee kommen, so zu rechnen:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-1)\cdot 8} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{8} = \ldots .$$

Aber dies ist *fehlerhaft*, da die korrekte Anwendung der Regel $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ die Voraussetzung $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ verlangt.

$\sqrt[3]{-8}$ ist im Komplexen „gemeint" als Lösung der Gleichung $z^3 = -8$. Mit $z = x + i \cdot y$ ist

$$\begin{aligned} -8 &= (x+iy)^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 \\ &= \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{=-8 \text{ (I)}} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{=0 \text{ (II)}}, \end{aligned}$$

Aus (II) erhält man $\sqrt{3} \cdot x = y$ oder $\sqrt{3} \cdot x = -y$ oder $y = 0$ und jeweils hieraus weiter mit (I)

$$\begin{aligned} x(x^2 - 9x^2) &= -8 \\ -8x^3 &= -8 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \\ y &= \sqrt{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(x^2 - 9x^2) &= -8 \\ -8x^3 &= -8 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \\ y &= -\sqrt{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^3 &= -8 \\ x &= -2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Demnach kann $\sqrt[3]{-8}$ sowohl $1 + \sqrt{3} \cdot i$ als auch $1 - \sqrt{3} \cdot i$ als auch -2 bedeuten. Man hat ja im Komplexen

$$-8 = (-2)^3 = (1 + \sqrt{3} \cdot i)^3 = (1 - \sqrt{3} \cdot i)^3,$$

und es ist außerdem

$$\left| -2 \right| = \left| 1 + \sqrt{3} \cdot i \right| = \left| 1 - \sqrt{3} \cdot i \right| = 2.$$

Halten wir also fest: $\sqrt[3]{-8}$ ist *auch im Komplexen kein eindeutig definierter* Ausdruck! (Siehe Bemerkung unten.)

Allgemein (also auch für gerade natürliche n) gilt:

> Die Gleichung $z^n - \alpha = 0$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $\alpha = a + bi = \left|\alpha\right| (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ hat die Lösungen
>
> $$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \qquad (0 \leq k \leq n-1).$$
>
> Ist speziell $\alpha = 1$, so $a = 1,\ b = 0$, damit $\varphi = 0$, und dann liefert
>
> $$z_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right) \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$
>
> die so genannten *n-ten Einheitswurzeln*.

Bemerkung
In Lehrbüchern zur Theorie der komplexen Funktionen ist es vielfach üblich, z_0 *Hauptwert der n-ten Wurzel* zu nennen und entgegen den zuvor gemachten Ausführungen mit $\sqrt[n]{\alpha}$ zu bezeichnen; er fällt mit der im Reellen benutzten n-ten Wurzel nur dann zusammen, wenn der Radikand positiv reell ist. Man sollte aber dieser Auffassung

nicht mehr folgen; denn keinesfalls darf man allgemein die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln für Wurzeln ins Komplexe übertragen.

Beispiel 1
Zu bestimmen sei die Lösungsmenge von $z^3 + 8 = 0$.
Hier ist $\alpha = -8 = 8 \cdot (-1 + i \cdot 0) = 8 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi))$ und $\sqrt[3]{|\alpha|} = \sqrt[3]{8} = 2$, so dass

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) &&= 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 + \sqrt{3} \cdot i \\
z_1 &= 2\left(\cos\left(\pi\right) + i \cdot \sin\left(\pi\right)\right) &&= 2\left(-1 + i \cdot 0\right) \quad = \; -2 \\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) &&= 2\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 - \sqrt{3} \cdot i
\end{aligned}$$

Genau diese Lösungen waren zuvor auf anderem Wege gefunden worden. Durch Nachrechnen zeigt man sofort

$$\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)^3 = (-2)^3 = \left(1 - \sqrt{3} \cdot i\right)^3 = -8.$$

Gemäß obiger Bemerkung steht jetzt $\sqrt[3]{-8}$ nicht für -2 sondern nur für den Hauptwert z_0, also $\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3} \cdot i$.
Als besondere Feststellung sei hier noch notiert, dass $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ sowie $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 2$. Die drei Lösungen liegen in gleich großen Abständen auf dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 2.

Beispiel 2
Zu ermitteln seien die Lösungen der Gleichung $z^3 = i$.
Hier ist $\alpha = i = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ und $\sqrt[3]{|\alpha|} = \sqrt[3]{1} = 1$, so dass

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) &&= +\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right) \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) &&= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right) \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) &&= \quad 0 - i \qquad = -i
\end{aligned}$$

Auch hier zeigt man durch Nachrechnen

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)\right)^3 = (-i)^3 = i,$$

und wiederum sei festgehalten, dass auch jetzt wieder $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ sowie $|z_0| = |z_1| = 1$. Die drei Lösungen liegen in gleichen Abständen auf dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1.
Wieder beachte man, dass – folgt man obiger Bemerkung – $\sqrt[3]{i}$ nur für den Hauptwert $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ steht, also $\sqrt[3]{i} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ ist.

Das Beispiel 2 zeigt, dass auch $\sqrt[3]{i}$ bzw. $i^{\frac{1}{3}}$ *keine eindeutig bestimmten Terme* sind; denn sie müssten zugleich $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$, $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$ und $-i$ bedeuten. Im Komplexen ist noch nicht einmal $\sqrt[3]{1}$ eindeutig als 1 bestimmt; denn bei gleichem Vorgehen wie in den beiden Beispielen findet man als Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = 1$ (im Komplexen!)

$$\left\{1;\, -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} \cdot i\right);\, -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)\right\}.$$

Erst mit der *Festlegung*, dass $\sqrt[3]{1}$ *nur für den Hauptwert* – in diesem Fall für den Wert 1 – stehen soll, gilt $\sqrt[3]{1} = 1$ wie im Reellen, da ja hier der Radikand 1 sowieso schon positiv reell ist.

3. Quadratwurzeln im Komplexen

Etwas anders stellt sich die Situation für *Quadratwurzeln* im Komplexen dar. Zu lösen sei die Gleichung $z^2 = a + ib$. Dazu sei $z = u + iv$ gesetzt; dann ist

$$z^2 = u^2 - v^2 + i \cdot 2uv = a + ib.$$

Hieraus entnimmt man

$$a = u^2 - v^2 \quad \text{und} \quad y = 2uv.$$

Diese beiden Gleichungen löst man nach u und v auf:

$$\begin{aligned} |a+ib| &= |z^2| = |z|^2 = u^2 + v^2, \\ |a+ib| + a &= (u^2+v^2) + (u^2-v^2) = 2u^2, \\ |a+ib| - a &= (u^2+v^2) - (u^2-v^2) = 2v^2, \end{aligned}$$

so dass wegen $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ jetzt

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \quad \text{und} \quad v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}.$$

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) = a, \\ b &= 2uv = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} = \pm\sqrt{a^2+b^2-a^2} = \pm\sqrt{b^2} = \pm|b|, \end{aligned}$$

und hier gilt die zweite Gleichungskette genau dann, wenn das Vorzeichen der Wurzeln mit dem Vorzeichen von b übereinstimmt. Dazu ist bzgl. der Vorzeichenfunktion noch eine Modifikation erforderlich (s. u.).

Die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ lassen sich mit *reellen* (!) Quadratwurzeln so schreiben ($z = u + iv$; s. o.):

$$z_k = (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} + i\cdot\operatorname{sign}(b)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right), \quad (k = 0; 1)$$

hierbei ist die sign-Funktion – abweichend von der sonst üblichen Definition! – so definiert (s. u. Beispiel 3):

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1\ , & \text{falls } x \geq 0 \\ -1\ , & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Durch direktes Nachrechnen bestätigt man umgekehrt sofort ($k = 0; 1$):

$$\begin{aligned} z_k^2 &= \left((-1)^k\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} + i\cdot\operatorname{sign}(b)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) + i\cdot 2\cdot\operatorname{sign}(b)\sqrt{\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-a^2\right)} \\ &= a + i\cdot\operatorname{sign}(b)\cdot|b| \\ &= a + i\cdot b. \end{aligned}$$

Außerdem bemerkt man auch hier wieder, dass $z_0 + z_1 = 0$ sowie $|z_0| = |z_1| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Die beiden Lösungen liegen diametral auf dem Kreis um den Ursprung mit den Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Einen Grund für die vom sonst Üblichen abweichende Definition der sign-Funktion liefert das folgende

Beispiel 3
Zu lösen sei die Gleichung $z^2 = -2$.
Es ist $-2 = -2 + i \cdot 0$, d. h. $a = -2$ und $b = 0$; weiter ist $|-2| = 2$, und damit rechnet man

$$z_k = (-1)^k \left(0 + i \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\right) \text{ für } k = 0; 1, \quad \text{d. h. } z_0 = i \cdot \sqrt{2} \text{ und } z_1 = -i \cdot \sqrt{2}.$$

Mit der sonst üblichen Definition sign(0) = 0 hätte man hier $z_0 = z_1 = 0$ erhalten. -

Wollte man zur Kennzeichnung der Lösungen der Gleichung $z^2 = a + ib$ das Wurzelzeichen benutzen, hätte man gemäß der Bemerkung auf Seite 2 folgende Möglichkeit:

$$(-1)^k \cdot \sqrt{a + ib} = (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(|a + ib| + a\right)} + i \cdot \text{sign}(b) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(|a + ib| - a\right)}\right) \quad (k = 0; 1).$$

Wie aber in der genannten Bemerkung schon gesagt wurde, darf man keinesfalls allgemein die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln für Wurzeln ins Komplexe übertragen. Deshalb halten wir zusammenfassend fest:

Beim Gebrauch des Wurzelzeichens im Reellen wie im Komplexen ist höchste Vorsicht geboten!