Aufgabe (aus: IBM-Nachrichten 37 (1987) Heft 287, S. 82)
Welchem Gesetz gehorchen die (natürlichen) Zahlen von 1 bis 100, zu deren Darstellung als Summe von Quadraten nicht mehr und nicht weniger sondern genau vier von Null verschiedene Quadratzahlen erforderlich sind?

Lösung (von Heilswint Siegmund aus der Mathe-AG des Gymnasiums St. Mauritz in Münster am 7. Juli 1987 in verkürzter Darstellung)
Eine systematische Überprüfung der Zahlen von 1 bis 100 auf die geforderte Bedingung liefert die (endliche) Zahlenfolge (c_n) mit den Gliedern 7; 15; 23; 28; 31; 39; 47; 55; 60; 63; 71; 79; 87; 92; 95.

Bei dieser Zahlenfolge fällt dreierlei auf:
1) Die Differenz zweier aufeinanderfolgender *ungerader* Zahlen ist stets 8.
2) Die Differenz zweier aufeinanderfolgender *gerader* Zahlen ist stets 32.
3) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen befinden sich stets vier ungerade Zahlen.

Gesucht ist eine Darstellung für (c_n).

Eine getrennte Untersuchung der ungeraden bzw. geraden Zahlen dieser Zahlenfolge ergibt:

I) Die ungeraden Zahlen der Folge (c_n) werden geliefert durch den Term

$$\alpha_n = 8n - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < n < 13$$

und stellen somit die Zahlenfolge (α_n) dar.

II) Die geraden Zahlen der Folge (c_n) werden geliefert durch den Term

$$\beta_n = 4(8n - 1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < n < 4$$

und stellen somit ebenfalls eine Zahlenfolge (β_n) dar.

Die Zahlenfolge (c_n) lässt sich als Summe der Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) darstellen, die durch leichte Abwandlung aus (α_n) bzw. (β_n) hervorgehen:

(a_n) hat die Glieder	7	15	23	0	31	39	47	55	0	63	71	79	87	0	95
(b_n) hat die Glieder	0	0	0	28	0	0	0	0	60	0	0	0	0	92	0

Gesucht ist zunächst eine Darstellung für (a_n). Mittels geeigneter Gaußklammerterme wird dafür gesorgt, dass in der Folge (α_n) an der 4., 9. bzw. 14. Stelle jeweils die Null produziert und außerdem danach die Zählreihenfolge wieder korrigiert wird:

$$a_n = \left(8\left(n - \left[\frac{n}{5}\right]\right) - 1\right) \cdot \left|\left[\frac{n+1}{5} - \left[\frac{n}{5} + 1\right]\right]\right| = \left(8\left(n - \left[\frac{n}{5}\right]\right) - 1\right) \cdot \left|\left[\frac{n-4}{5}\right] - \left[\frac{n}{5}\right]\right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 16$. Analog findet man die gesuchte Darstellung für (b_n):

$$b_n = 4\left(8\left(1 + \left[\frac{n}{5}\right]\right) - 1\right) \cdot \left(\left[\frac{n+1}{5}\right] - \left[\frac{n}{5}\right]\right) = 4\left(8\left[\frac{n}{5}\right] + 7\right) \cdot \left(\left[\frac{n+1}{5}\right] - \left[\frac{n}{5}\right]\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 16$. Da $c_n = a_n + b_n$, so ist

$$\boxed{c_n = \left(8\left(n - \left[\frac{n}{5}\right]\right) - 1\right) \cdot \left|\left[\frac{n-4}{5}\right] - \left[\frac{n}{5}\right]\right| + 4\left(8\left[\frac{n}{5}\right] + 7\right) \cdot \left(\left[\frac{n+1}{5}\right] - \left[\frac{n}{5}\right]\right)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 16$ die gesuchte Darstellung genau derjenigen Zahlen von 1 bis 100, zu deren Aufbau man genau vier Quadratzahlen benötigt.