Aufgaben zu Ungleichungen mit Lösungen

Aufgabe 1
Zeige, dass

a) $a + \frac{1}{a} \geq 2$ *für alle positiven reellen* a*.*

b) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ *für alle reellen* x*.*

c) $ab + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} \geq \sqrt{8}$ *für alle positiv reellen* a *und* b*. Für welche* a, b *gilt Gleichheit?*

d) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ *für alle nicht-negativen reellen* a, b, c*.*

e) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ *für alle reellen* a, b, c*.*

f) $\frac{1}{3}(x+y+z) \geq \sqrt[3]{xyz}$ *für alle nicht-negativen reellen* x, y, z*.*

g) $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$ *für alle reellen* a, b*.*

h) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ *für alle nicht-negativen reellen* a, b, c, d*.*

i) $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 2^n$ *für alle reellen* $a_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ *mit* $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$*.*

Lösung
a) Für alle reellen a gilt $(a-1)^2 \geq 0$, so dass unter Beachtung der Voraussetzung $a > 0$ gilt:

$$(a-1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 1 \geq 2a \quad \Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

b) Da stets $x^2 + 1 > 0$, so gilt nach a): $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$

c) Mit a) sowie der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* ergibt sich

$$ab + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} = (a + \frac{1}{a})b + \frac{1}{b} \geq 2b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

Gleichheit gilt genau für $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d) Unter Benutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* gilt

$$(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \geq 8abc.$$

e) Da Quadrate reeller Zahlen stets nicht-negativ sind, gilt

$$\begin{aligned}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.\end{aligned}$$

f) Zunächst hat man für alle nicht-negativen $a, b, c:$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq 0,$$

da der rechte der Klammerausdrücke nach d) stets nicht-negativ ist. Somit hat man jetzt $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Setzt man nun $x = a^3,\ y = b^3,\ z = c^3$, so sind auch x, y, z nicht-negativ, und man erhält sofort $x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}$

und hieraus die Behauptung.

g) $(a+b)^4 = ((a+b)^2)^2 \le (2(a^2+b^2))^2 = 4(a^2+b^2)^2 \le 4\cdot 2(a^4+b^4) = 8(a^4+b^4)$.

h) Aus der gültigen Ungleichung $\frac{1}{2}(ad+bc) \ge \sqrt{ad\cdot bc}$ folgt

$$ab+ad+bc+cd \ge ab+2\sqrt{abcd}+cd \;\Rightarrow\; (a+b)(c+d) \ge \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2,$$

und Radizieren der letzten Ungleichung liefert die Behauptung.

i) Wieder nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* gilt

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \ge \prod_{i=1}^{n}\left(2\cdot\sqrt{1\cdot a_i}\,\right) = 2^n\cdot\sqrt{\prod_{i=1}^{n}a_i} = 2^n.$$

Aufgabe 2
Seien $a,b,c,d>0$. Man beweise:

$$\frac{12}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\;.$$

Lösung
Die linke und die rechte Seite der Ungleichung kann man jeweils dreiteilig umordnen:

$$\frac{4}{a+b+c+d}+\frac{4}{a+b+c+d}+\frac{4}{a+b+c+d} \le \left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Nun wird gezeigt, dass jeder Teil der linken Seite höchstens gleich dem entsprechenden Teil der rechten Seite ist:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{a+b+c+d} && \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\\
\Leftrightarrow\quad & 4(a+b)(c+d) && \le (a+b+c+d)(c+d)+(a+b+c+d)(a+b)\\
\Leftrightarrow\quad & 4(a+b)(c+d) && \le (a+b+c+d)^2\\
\Leftrightarrow\quad & 4(a+b)(c+d) && \le (a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\
\Leftrightarrow\quad & 0 && \le (a+b)^2-2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\
\Leftrightarrow\quad & 0 && \le \left((a+b)-(c+d)\right)^2\;.
\end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung in vorstehender Umformung gilt, so auch die erste. Für die beiden übrigen Teile zeigt man analog:

$$\frac{4}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d} \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le \left((a+c)-(b+d)\right)^2\;,$$

und

$$\frac{4}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d} \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le \left((a+d)-(b+c)\right)^2\;.$$

Durch Addition der drei Teile erhält man nun die zu beweisende Ungleichung.

Aufgabe 3
Seien $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $a+b+c<1$. Man beweise, dass dann gilt

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} < \frac{3}{2}.$$

Lösung

Wegen $a+b+c<1$ ist $\dfrac{1}{ab+c} < \dfrac{1}{ab+(a+b+c)c}$ (Entsprechendes gilt in den beiden weiteren Fällen). Unter Mitbenutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* gilt daher:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}\\
&<\sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+(a+b+c)b}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+(a+b+c)a}}\\
&=\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}+\sqrt{\frac{ac}{(b+a)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\\
&<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+a}+\frac{c}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{c}{a+c}+\frac{b}{c+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}+\frac{b}{a+b}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\qquad 1 \qquad + \qquad 1 \qquad + \qquad 1 \qquad\right)\\
&=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Seien $a,b\in\mathbb{R}$ so gewählt, dass $a^3+b^3=1$. Man beweise, dass dann $a^2+ab+b^2>a+b$ gilt.

Lösung

Nach Voraussetzung ist auch $\sqrt[3]{a^3+b^3}=1$ (– Informationsgewinn! –), und man hat zu zeigen, dass

$$a^2+ab+b^2>(a+b)\sqrt[3]{a^3+b^3}$$

ist. Potenzieren mit 3 und Äquivalenzumformungen liefern

$$\begin{aligned}
&(a^2+ab+b^2)^3 &&>(a+b)^3\cdot(a^3+b^3)\\
\Leftrightarrow\quad &(a^2+ab+b^2)^3 &&>(a+b)^3\cdot(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
\Leftrightarrow\quad &(a^2+ab+b^2)^3 &&>(a+b)^4\cdot(a^2-ab+b^2)\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\right)^3 &&>\frac{(a+b)^4}{(ab)^2}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{ab}\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)^3 &&>\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right).
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser letzten Ungleichung wird sofort offenbar, wenn man jetzt $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ substituiert:

$$\begin{aligned}
&(x+1)^3 &&>(x+2)^2(x-1)\\
\Leftrightarrow\quad &x^3+3x^2+3x+1 &&>x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4\\
\Leftrightarrow\quad &3x+5 &&>0,
\end{aligned}$$

und diese Ungleichung gilt wegen $x>0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 5
Man beweise, dass für beliebige nicht-negative reelle Zahlen a, b, c, d folgende Ungleichung gilt:

$$(ab)^{1/3} + (cd)^{1/3} \leq ((a + c + b)(a + c + d))^{1/3} .$$

Lösung
Zunächst lässt sich die gegebene Ungleichung äquivalent umformen in

$$\left(\frac{ab}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{cd}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.$$

Durch Aufspaltung und Erweitern erhält man

$$\begin{aligned}\frac{ab}{(a+c+b)(a+c+d)} &= \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a+c+d} \cdot \frac{b}{a+c+b},\\ \frac{cd}{(a+c+b)(a+c+d)} &= \frac{c}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a+c+b} \cdot \frac{d}{a+c+d}.\end{aligned}$$

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert jetzt

$$\begin{aligned}3 \cdot \left(\frac{ab}{(a+c+b)(a+c+d)}\right)^{1/3} &\leq \frac{a}{a+c} + \frac{a+c}{a+c+d} + \frac{b}{a+c+b},\\ 3 \cdot \left(\frac{cd}{(a+c+b)(a+c+d)}\right)^{1/3} &\leq \frac{c}{a+c} + \frac{a+c}{a+c+b} + \frac{d}{a+c+d}.\end{aligned}$$

Addiert man hier die linken bzw. rechten Seiten, erhält man die Behauptung.

Aufgabe 6
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Man beweise: $\dfrac{b+c}{a^2} + \dfrac{c+a}{b^2} + \dfrac{a+b}{c^2} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Lösung
Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt sogar

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{a^2(b+c)(b-c)^2 + b^2(c+a)(c-a)^2 + c^2(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2c^2} \geq 0$$

und daher erst recht die Behauptung.

Aufgabe 7
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Man beweise: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq \dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{b+c}{c+a} + \dfrac{c+a}{a+b}$.

Lösung
Die gegebene Ungleichung ist äquivalent mit

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 0.$$

Die linke Seite kann umgeformt werden in

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{c}{b}} - \frac{1+\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}} - \frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{b}{a}}.$$

Setzt man $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ und $z = \frac{c}{a}$, so ist $xyz = 1$, damit auch $\frac{1}{x} = yz$, $\frac{1}{y} = zx$, $\frac{1}{z} = xy$. Hiermit erhält man durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned}&\left(x+y+z-\frac{1+x}{1+zx}-\frac{1+y}{1+xy}-\frac{1+z}{1+yz}\right)(1+zx)(1+xy)(1+yz)\\ &=\big(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\big)+\big((x^2z+y^2x+z^2y)-3\big)\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

letzteres weil erstens

$$2(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)) = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0,$$

zweitens nach der *Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel* unter Beachtung von $xyz = 1$

$$(x^2z+y^2x+z^2y) \geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2z\cdot y^2x\cdot z^2y} = 3\cdot\sqrt[3]{(xyz)^3} = 3.$$

Aufgabe 8 (aus: Baltic Way 2003, Nr. 4)
Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen gilt:

$$\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}.$$

Lösung
Aus den *Ungleichungen zwischen harmonischem, geometrischem und arithmetischem Mittel* ergibt sich zunächst

$$\frac{2a}{a^2+bc} = \frac{1}{\frac{1}{2}(a+\frac{bc}{a})} \leq \sqrt{\frac{1}{bc}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

(Die Ungleichung $\frac{2a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ lässt sich auch direkt durch Äquivalenzumformung beweisen:

$$\begin{aligned}\frac{2a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\Leftrightarrow\quad 4abc \leq a^2c+bc^2+a^2b+b^2c\\ &\Leftrightarrow\quad 0 \leq a^2c-2abc+bc^2+a^2b-2abc+b^2c\\ &\Leftrightarrow\quad 0 \leq (a-c)^2b+(a-b)^2c,\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt wegen $b, c \in \mathbb{R}^+$.)
Analog findet man

$$\frac{2b}{b^2+ca} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\begin{aligned}\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab} &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\ &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\ &= \frac{bc+ac+ab}{abc}.\end{aligned}$$

Da $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$, bleibt nur noch $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ nachzuweisen. Multiplikation mit 2 und Äquivalenzumformungen liefern

$$\begin{aligned}&2ab+2bc+2ca \leq a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2\\ \Leftrightarrow\quad &0 \leq a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\\ \Leftrightarrow\quad &0 \leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,\end{aligned}$$

und diese letzte Ungleichung gilt sogar für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9 (vgl. „Mathe für jung und alt“, Aufgabenarchiv 78_61)
Man beweise, dass für jede positive reelle Zahl a und jede ganze Zahl $n > 0$ die Ungleichung

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2(a + \frac{1}{a} - 2)$$

gilt, und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung
Durch Äquivalenzumformung erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2(a + \frac{1}{a} - 2) \\ \Leftrightarrow\quad & \left(a^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}\right)^2 \geq n^2 \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\frac{a^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}}{n}\right)^2 \geq \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2 . \end{aligned}$$

Ist $a \geq 1$, setze man $b = a^{\frac{1}{2}}$, anderenfalls $b = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Dann gilt in jedem Fall $b \geq \frac{1}{b}$ und Gleichheit genau für $b = 1$, d. h. $a = 1$, so dass auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel gezogen werden darf. Danach bleibt nur noch die Ungleichung

$$\frac{b^n - \frac{1}{b^n}}{n} \geq b - \frac{1}{b}$$

zu beweisen. Der Term $b^n - \frac{1}{b^n}$ ist faktorisierbar:

$$b^n - \frac{1}{b^n} = \left(b - \frac{1}{b}\right)\left(b^{n-1} + b^{n-3} + \ldots + \frac{1}{b^{n-3}} + \frac{1}{b^{n-1}}\right).$$

und damit bleibt nach Division durch $b - \frac{1}{b}$ nur noch

$$\frac{b^{n-1} + b^{n-3} + \ldots + \frac{1}{b^{n-3}} + \frac{1}{b^{n-1}}}{n} \geq 1.$$

Der Zähler auf der linken Seite enthält genau n Summanden, so dass jetzt nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* folgt

$$\frac{b^{n-1} + b^{n-3} + \ldots + \frac{1}{b^{n-3}} + \frac{1}{b^{n-1}}}{n} \geq \sqrt[n]{b^{n-1} \cdot b^{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b^{n-3}} \cdot \frac{1}{b^{n-1}}} = \sqrt[n]{1} = 1,$$

und damit ist die gegebene Ungleichung als gültig nachgewiesen. Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$b^{n-1} = b^{n-3} = \ldots = \frac{1}{b^{n-3}} = \frac{1}{b^{n-1}}$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$, also genau dann, wenn $b = 1$ und folglich $a = 1$ gilt. Ferner gilt für $a \neq 1$ Gleichheit nur für $n = 1$. Damit ist auch die zweite Frage der Aufgabe beantwortet.

Aufgabe 10
Man zeige, dass $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$ für alle $x, y, z \geq 0$ gilt.

Lösung
Zweimalige Anwendung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 + z^4 &= \frac{2x^4 + 2y^4 + 2z^4}{2} \\
&= \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \\
&\geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\
&= \frac{x^2y^2 + y^2z^2}{2} + \frac{y^2z^2 + z^2x^2}{2} + \frac{z^2x^2 + x^2y^2}{2} \\
&\geq xy^2z + yz^2x + zx^2y \\
&= xyz(x + y + z)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

Man kann die Lösung auch noch anders hinschreiben. Jede der folgenden drei Ungleichungen gilt aufgrund der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*:

$$\begin{array}{llllll}
x^4 + x^4 & + \; y^4 & + \; z^4 & \geq & 4x^2yz \\
x^4 & + \; y^4 + y^4 & + \; z^4 & \geq & 4xy^2z \\
x^4 & + \; y^4 & + \; z^4 + z^4 & \geq & 4xyz^2
\end{array}$$

Durch Addition der linken und rechten Seiten erhält man jetzt sofort die Behauptung.

Aufgabe 11
Man zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Erste Lösung
Wegen der Beliebigkeit der Wahl von $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ wird die gegebene Ungleichung nicht verändert, wenn man a mit b vertauscht; die Ungleichung lautet dann

$$\frac{1}{a(b+a)} + \frac{1}{c(a+c)} + \frac{1}{b(c+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Addition dieser Ungleichung und der gegebenen liefert zusammen mit weiteren Äquivalenzumformungen

$$\begin{array}{lll}
& \dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + \dfrac{1}{a(c+a)} + \dfrac{1}{a(b+a)} + \dfrac{1}{c(a+c)} + \dfrac{1}{b(b+c)} & \geq \dfrac{27}{(a+b+c)^2} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{a+b}{ab(a+b)} + \dfrac{b+c}{bc(b+c)} + \dfrac{c+a}{ac(c+a)} & \geq \dfrac{27}{(a+b+c)^2} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} & \geq \dfrac{27}{(a+b+c)^2} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{c+a+b}{abc} & \geq \dfrac{27}{(a+b+c)^2} \\
\Leftrightarrow & (a+b+c)^3 & \geq \; 27abc,
\end{array}$$

und die letzte Zeile der Umformung gilt gemäß der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*.

Zweite Lösung
Die gegebene Ungleichung kann äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} && \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}\\
\Leftrightarrow\quad &((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{b(a+c)}+\frac{1}{c(b+a)}+\frac{1}{a(c+b)}\right)(a+b+c)\geq 27\\
\Leftrightarrow\quad &((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{c(a+b)}+\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}\right)(c+a+b)\geq 27
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt aber für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$; denn die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert bei Anwendung auf jeden Faktor der linken Ungleichungsseite

$$\begin{aligned}
&((a+b)+(b+c)+(c+a))\cdot\left(\frac{1}{c(a+b)}+\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}\right)\cdot(c+a+b)\\
&\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{c(a+b)}\cdot\frac{1}{a(b+c)}\cdot\frac{1}{b(c+a)}}\cdot 3\sqrt[3]{cab}\\
&= 27.
\end{aligned}$$

Dritte Lösung
Die linke Seite der gegebenen Ungleichung kann man nach dem *Umordnungssatz* nach unten abschätzen:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}$$

und jetzt die schärfere Ungleichung beweisen:

$$\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\geq\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Diese Ungleichung lässt sich äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
&\frac{ab+bc+ca}{a(b+c)}+\frac{ab+bc+ca}{b(c+a)}+\frac{ab+bc+ca}{c(a+b)}\geq\frac{9}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ca}{b(c+a)}+\frac{ab}{c(a+b)}\geq\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $x = bc,\ y = ca,\ z = ab$ geht die letzte Ungleichung über in die so genannte NESBITT-*Ungleichung* (nach A. M. NESBITT 1903):

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Falls diese Ungleichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden darf, hat man sie noch zu beweisen und kann dazu ihre linke Seite umformen:

$$\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}-3=\frac{1}{2}((x+y)+(y+z)+(z+x))\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)-3,$$

so dass man jetzt die *Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel* anwenden kann, die sich wie folgt umformen lässt:

$$\frac{u+v+w}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}}\ \Leftrightarrow\ (u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geq 9.$$

Mit $x+y=u,\ y+z=v,\ w=z+x$ erhält man

$$\frac{1}{2}\left((x+y)+(y+z)+(z+x)\right)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)-3\geq\frac{1}{2}\cdot 9-3=\frac{3}{2.}$$

Damit ist die Gültigkeit der NESBITT-Ungleichung und somit auch der eingangs betrachteten schärferen Ungleichung bewiesen, aus der nun die Gültigkeit der in der Aufgabenstellung gegebenen Ungleichung folgt; denn man hat

$$\begin{aligned}
& 0 && \leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\
\Leftrightarrow\ & 0 && \leq a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\\
\Leftrightarrow\ & 3(ab+bc+ca) && \leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\
\Leftrightarrow\ & 3(ab+bc+ca) && \leq (a+b+c)^2\\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{(a+b+c)^2} && \leq \frac{1}{ab+bc+ca}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{27}{(a+b+c)^2} && \leq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}\ ,
\end{aligned}$$

.

Aufgabe 12
Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a,b,c,d mit $a+b+c+d=1$ folgende Ungleichung gilt:

$$abc+bcd+cda+dab\leq\frac{1+176abcd}{27}.$$

Lösung
Die Voraussetzung liefert $(a+b+c+d)^4=1$.
Die Behauptung ist symmetrisch in a,b,c,d; daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a\leq b\leq c\leq d$. Dann kann man $b=a+x;\ c=a+x+y$ und $d=a+x+y+z$ mit nicht-negativen reellen x,y,z setzen, und mit der weiteren Setzung

$$F(a,b,c,d)=(a+b+c+d)^4+176abcd-27(a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$$

erhält man dann nach längerer Umformungsarbeit

$$\begin{aligned}
F(a,b,c,d) &= F(a,a+x,a+x+y,a+x+y+z)\\
&= 5a^2\left(3x^2+4y^2+3z^2+4yz+2zx+4xy\right)\\
&\quad +2a\left(7x^3+10y^3+8z^3+14x^2y+7x^2z15y^2z+25y^2x+18z^2x++21z^2y+25xyz\right)\\
&\quad +(3x+2y+z)\left(8y^3+z^3+12y^2z+9y^2x+9z^2x+6z^2y+9xyz\right)\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt jetzt sofort die Behauptung.

Aufgabe 13
Man beweise, dass für alle $a,b\in\mathbb{R}^+$ mit $a+b\leq 1$ gilt: $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 5.$

Lösung

$$a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}=\frac{(a-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}}{a}\geq\frac{a+\frac{3}{4}}{a}=1+\frac{3}{4a}$$

und analog $b + \frac{1}{b} \geq 1 + \frac{3}{4b}$, so dass

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} \geq 2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel* liefert unter Beachtung der Voraussetzung $a + b \leq 1$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2},$$

also $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ und daher $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 5$.

Aufgabe 14

Man zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *mit* $c \geq a + b$ *gilt* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 10$.

Lösung

Zunächst hat man $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$; denn genau wie beim Beweis der *Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel* formt man äquivalent um:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \;\Leftrightarrow\; \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \;\Leftrightarrow\; (a+b)^2 \geq 4ab \;\Leftrightarrow\; a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2 \geq 0,$$

und die letzte Ungleichung gilt sogar für alle reellen Zahlen a, b. Hiermit findet man unter Benutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* sowie der Voraussetzung $c \geq a + b$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &\geq (a+b+c)\left(\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}\right)\\
&= \frac{4a}{a+b} + \frac{4b}{a+b} + \frac{4c}{a+b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{c}\\
&= \frac{4(a+b)}{a+b} + \frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c} + 1\\
&= 5 + \frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c}\\
&= 5 + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c}\\
&\geq 5 + 5\sqrt[5]{\frac{c^4}{(a+b)^4} \cdot \frac{a+b}{c}}\\
&= 5 + 5\sqrt[5]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^3}\\
&\geq 5 + 5 = 10.
\end{aligned}$$

Zusatz

Lässt man die Voraussetzung $c \geq a + b$ in Aufgabe 5 fallen, so erhält man für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\\
&= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\\
&\geq 3 + 2 + 2 + 2\\
&= 9.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15
Man zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ *mit* $a+b+c=3$ *gilt:* $a^2+b^2+c^2 \geq 3$.

Beweis (mittels LAGRANGE-Multiplikator)
Sei $f(a,b,c,\lambda) = a^2+b^2+c^2-3+\lambda(a+b+c-3)$.
Dann ist $\frac{\partial f}{\partial a} = 2a+\lambda$, und für den kritischen Punkt $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, was $a = -\frac{\lambda}{2}$ ergibt.
Nach gleichem Vorgehen erhält man $b = c = -\frac{\lambda}{2}$. Damit ist $a+b+c = -\frac{3\lambda}{2} = 3$, woraus man $\lambda = -2$ entnimmt.
Nun hat man

$$f(a,b,c,\lambda) = a^2+b^2+c^2-3-2(a+b+c-3) = (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0,$$

und hieraus ergibt sich wegen $a+b+c=3$ die Behauptung.

Aufgabe 16
Man zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ *mit* $a+b+c \geq 3$ *gilt:* $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

Beweis
Zunächst gilt wegen $a+b+c \geq 3$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 9.$$

Außerdem hat man für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.\end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} u &= a^2+b^2+c^2, \\ v &= ab+bc+ca; \end{aligned}$$

dann ist $u \geq v$ und $u+v = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ und

$$u+2v = (a+b+c)^2 \geq 9.$$

Nun gilt für beliebige reelle Zahlen u, v

$$u \geq v \;\Leftrightarrow\; 3(u+v) \geq 2(u+2v),$$

und da $2(u+2v) \geq 18$, so folgt jetzt sofort $u+v \geq \frac{2}{3}(u+2v) \geq 6$, d. h. es gilt die Behauptung.

Aufgabe 17
Man zeige: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *gilt:* $a \geq b+c \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq 1.$

Beweis
Wegen der Voraussetzung $a \geq b+c$ hat man $a-b \geq c,\; a-c \geq b,\; \frac{b+c}{a} \leq 1$ und damit dann

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 &= \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\ +\ \frac{a}{c}-2+\frac{c}{a}\\ &= \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}\\ &\geq \frac{(a-b)c}{ab}+\frac{(a-c)b}{ac}\\ &= \frac{c}{b}-\frac{c}{a}\ +\ \frac{b}{c}-\frac{b}{a}\\ &= \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\ -\ \frac{b+c}{a}\\ &\geq 2-1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 18

Man zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ gilt $\dfrac{xy}{z^3}+\dfrac{yz}{x^3}+\dfrac{zx}{y^3}=3$.

Beweis

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite bestätigt man die Richtigkeit der folgenden Faktorisierung (die man sich übrigens gut merken sollte!):

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Hieraus gewinnt man die Aussage: *Das Verschwinden der Summe dreier Zahlen hat zur Folge, dass die Summe ihrer Kuben (d. h. dritten Potenzen) gleich dem 3fachen ihres Produktes ist.*
Das bedeutet für $a=\frac{1}{x^3},\ b=\frac{1}{y^3},\ c=\frac{1}{z^3}$ wegen der Voraussetzung $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}.$$

Multiplikation vorstehender Gleichung mit xyz liefert nun die Behauptung.

Aufgabe 19

Drei positive reelle Zahlen a, b, c seien so gewählt, dass $a+b+c=3$ ist. Man zeige: Dann gilt

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{9}{4abc}\geq\frac{21}{4}.$$

Lösung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, dass $c=\max\{a;b;c\}$.
Sei $t=\dfrac{a+b}{2}$ und $f(a;b;c)=\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{9}{4abc}$. Dann ist $f(a;b;c)\geq f(t;t;c)$, wie folgende Rechnung

zeigt:

$$\begin{aligned}
f(a;b;c)-f(t;t;c) &= \left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{9}{4abc}\right)-\left(\frac{t^2}{c}+c+c+\frac{9}{4t^2c}\right)\\
&= \left(\frac{ab}{c}-\frac{t^2}{c}\right)+c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{9}{4abc}-\frac{9}{4t^2c}\right)\\
&= \frac{ab}{c}-\frac{(a+b)^2}{4c}+c\cdot\frac{(a-b)^2}{ab}+9\left(\frac{1}{4abc}-\frac{1}{(a+b)^2c}\right)\\
&= \frac{-(a-b)^2}{4c}+c\cdot\frac{(a-b)^2}{ab}+9\cdot\frac{(a-b)^2}{4abc(a+b)^2}\\
&= (a-b)^2\left(-\frac{1}{4c}+\frac{c}{ab}+\frac{9}{4abc(a+b)^2}\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Aus $a+b+c=3$ erhält man $c=3-(a+b)=3-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)=3-2t$, und es bleibt noch zu zeigen, dass $f(t;t;c)=f(t;t;3-2t)\geq\frac{21}{4}$ ist. Dies aber ist äquivalent mit

$$9(t-1)^2(4t^2+2t+1)\geq 0,$$

und diese Ungleichung gilt.
Die gegebene Ungleichung wird zur Gleichung, falls $a=b=c=1$. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 20
Seien $x,y,z\in\mathbb{R}_0^+$ mit $x+y+z=1$. Man zeige, dass dann

$$x^2y+y^2z+z^2x\leq\frac{4}{27}$$

gilt, und außerdem, wann Gleichheit gilt.

Lösung
Da die Ungleichung symmetrisch in x,y,z ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x\geq y\geq z\geq 0$ vorausgesetzt.
Man setze $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ und vergleiche $f(x+w,y,z-w)$ und $f(x,y,z)$ für alle Einsetzungen im zulässigen Bereich und für $w>0:$

$$\begin{aligned}
f(x+w,y,z-w) &= (x+w)^2y+y^2(z-w)+(z-w)^2(x+w)\\
&= w^3+w^2(x+y-2z)+w(2xy-2xz-y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x\\
&= w^3+w^2(x+y-2z)+w(y-z)(2x-y-z)+f(x,y,z)\\
&> f(x,y,z);
\end{aligned}$$

denn wegen $x\geq y\geq z$ ist $x+y-2z\geq 2z-2z=0$ und $2x-y-z\geq 2x-2y\geq 0$, außerdem $w^3>0$ wegen $w>0$.
Bei beliebig aber fest gewähltem y wird die Differenz $x-z=(1-y)-z$ zwischen x und z maximal genau für $z=0$, und dann wird auch der Wert von $f(x+w,y,z-w)$ maximal. Daher ist

$$f(x,y,z)\leq\max\{x^2y\}\ \text{ mit }\ x+y=1.$$

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert hierzu

$$1=x+y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+y\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}},$$

und hieraus entnimmt man $\frac{4}{27} \geq x^2y$, so dass wegen $z = 0$ (s. o.) auch $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$ gilt.
Unter der eingangs gemachten Zusatzvoraussetzung $x \geq y \geq z \geq 0$ gilt Gleichheit in $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$ genau für $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = 0$.

Aufgabe 21
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Man zeige, dass dann gilt:

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4 \cdot \sqrt{3}.$$

Lösung
Nach der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* hat man

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (1 \cdot a^2 + 1 \cdot b^2 + 1 \cdot c^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^4 + b^4 + c^4),$$

d. h. $(a^4 + b^4 + c^4) \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{1}{3}$, letzteres nach Voraussetzung. Hiermit kann man nun rechnen und unter Mitbenutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* abschätzen:

$$\begin{aligned}
abc(a + b + c) + 1 &= a^2bc + ab^2c + abc^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2 \qquad \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\geq a^2bc + ab^2c + abc^2 + \frac{1}{3} + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&= a^2bc + ab^2c + abc^2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\
&\geq 12 \cdot \sqrt[12]{a^2bc \cdot b^2ca \cdot c^2ab \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2a^2 \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2a^2} \\
&= 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{3^6}a^{12}b^{12}c^{12}} \\
&= 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{3^6}{3^{12}}(abc)^{12}} \\
&= 4\sqrt{3} \cdot abc,
\end{aligned}$$

somit $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$, wie behauptet.

Aufgabe 22
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{(a + b + c)^2}{(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)} \leq \frac{1}{3}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt.

Lösung
Zunächst findet man für alle positiven reellen a und b

$$\begin{aligned}
(a^2 + 2)(b^2 + 2) &= (a^2 + 1)(b^2 + 1) + a^2 + b^2 + 3 \\
&= (a^2 + 1^2)(1^2 + b^2) + a^2 + b^2 + 3 \\
&\geq (a \cdot 1 + 1 \cdot b)^2 + (a^2 + b^2) + 3 \qquad \text{(CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung)} \\
&\geq (a + b)^2 + \frac{1}{2}(a + b)^2 + 3 \qquad (*) \\
&= \frac{3}{2}\left((a + b)^2 + 2\right)
\end{aligned}$$

wobei (*) gilt, weil

$$a^2+b^2 \geq 2ab \;\Leftrightarrow\; 2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) &\geq \frac{3}{2}\left((a+b)^2+2\right)(c^2+2)\\ &= \frac{3}{2}\left((a+b)^2c^2+2(a+b)^2+2c^2+4\right)\\ &= \dots\end{aligned}$$

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert:

$$(a+b)^2c^2+4 \geq 2\sqrt{(a+b)^2c^2\cdot 4} = 4(a+b)c,$$

so dass man weiter abschätzen kann:

$$\begin{aligned}\dots &\geq \frac{3}{2}\left(2(a+b)^2+4(a+b)c+2c^2\right)\\ &= \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}(a+b)+\sqrt{2}c\right)^2\\ &= \frac{3}{2}\left(2(a+b)^2+4(a+b)c+2c^2\right)\\ &= 3(a+b+c)^2\end{aligned}$$

Aus $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$ ergibt sich nun durch Umformung sofort die Behauptung.

Zusatz
Aus der Behauptung der Aufgabe 12 gewinnt man die Gültigkeit folgender Ungleichung:

$$\frac{ab+bc+ca}{(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)} \leq \frac{1}{9}$$

für alle positiven reellen a, b und c; denn erstens liefert

$$0 \leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$$

die Ungleichung $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (sogar für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$), und zweitens erhält man hiermit

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca),$$

so dass $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2 \geq 9(ab+bc+ca)$.

Aufgabe 23
Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ mit der Nebenbedingung $ab+bc+ca=3$:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \leq 1.$$

Lösung
Mittels der Termumformung $\frac{1}{a^2+2} = 1-\frac{2}{a^2+2}$ und entsprechend für b und c geht die gegebene Ungleichung in die folgende äquivalente Ungleichung über:

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2} \geq 1.$$

Nun ist - man beachte die Voraussetzung! -

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2+6 = (a^2+2)+(b^2+2)+(c^2+2),$$

so dass $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = 1$, und man ist fertig, sobald man

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}$$

gezeigt hat. Eine Abschätzung unter Benutzung der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* liefert

$$\begin{aligned}
&(a^2+2+b^2+2+c^2+2)\left(\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2}\right) \\
&= \left(\sqrt{a^2+2}^{\,2} + \sqrt{b^2+2}^{\,2} + \sqrt{c^2+2}^{\,2}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2+2}}^{\,2} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+2}}^{\,2} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+2}}^{\,2}\right) \\
&\geq \left(\sqrt{a^2+2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2+2}} + \sqrt{b^2+2}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{b^2+2}} + \sqrt{c^2+2}\cdot\sqrt{\frac{c^2}{c^2+2}}\right)^2 \\
&= (a+b+c)^2,
\end{aligned}$$

somit

$$(a^2+b^2+c^2+6)\left(\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2}\right) \geq (a+b+c)^2,$$

und Division durch $a^2+b^2+c^2+6$ ergibt jetzt zusammen mit $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = 1$ die Behauptung. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a=b=c=1$.

Aufgabe 24
Man zeige, dass für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

Lösung
Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &= \frac{a^2-b^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2+a^2}{c+a} \\
&= a-b+\frac{b^2}{a+b} + b-c+\frac{c^2}{c+a} + c-a+\frac{a^2}{c+a} \\
&= \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}
\end{aligned}$$

kann statt der gegebenen Ungleichung die folgende gezeigt werden:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

Diese aber gilt; denn die *Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel* liefert

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2(a^2+b^2)} \geq a+b \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}},$$

damit $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \geq \dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$ und Entsprechendes für den zweiten und dritten Summanden auf der linken Ungleichungsseite.

Aufgabe 25 (aus: Horst Sewerin: Mathem. Schülerwettbewerbe, Manz 1979, ISBN 3-7863-0347-9; S. 147.)
Man beweise die Allgemeingültigkeit der Ungleichung $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c} \geq a+b+c$ *für* $a, b, c > 0$.

Lösung
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \geq b \geq c$ („*Symmetriezerstörung*“); dann sind $a-b$, $a-c$, $b-c$ nicht-negativ. Äquivalenzumformung der gegebenen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2(b^2+c^2-bc) + b^2c^2 - b^2ac - bac^2 && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2(b^2+c^2-bc) + bc(bc-ba-ac) && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2(b-c)^2 + a^2bc + bc(bc-ba-ac) && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2(b-c)^2 + bc(a^2+bc-ba-ac) && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2(b-c)^2 + bc\left(a(a-b) - c(a-b)\right) && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{a^2(b-c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{bc}_{\geq 0}\underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(a-c)}_{\geq 0} && \geq 0.
\end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung unter den gegebenen Voraussetzungen gilt, so auch die ursprüngliche Ungleichung.

Aufgabe 26 (aus: 6. IMO 1964, Aufgabe 2)
a, b, c *seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Man beweise:*

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Erste Lösung
Da $f(ta, tb, tc) = t^3 \cdot f(a, b, c)$ mit $t \neq 0$ für $f(a, b, c) = a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) - 3abc$ gilt, ist die Ungleichung homogen in a, b, c vom Grad 3; daher kann man normieren und $a = 1$ sowie $b = 1+x,\ c = 1+y$ mit $0 \leq x \leq y$ setzen und erhält als neue Ungleichung

$$(1+x+y) + (1+x)^2(1-x+y) + (1+y)^2(1+x-y) \leq 3(1+x)(1+y),$$

die nach Auflösung der Klammern und Umordnung übergeht in

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2 - x^2y - xy - xy^2 + y^2 + y^3 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + x^2 + y^2 - xy \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\underbrace{(x^2-y^2)}_{\leq 0}\underbrace{(x-y)}_{\leq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{xy}_{\geq 0} \ \geq 0
\end{aligned}$$

und wegen $x - y \leq 0$ sowie $x, y \geq 0$ gilt diese letzte Ungleichung und damit auch die gegebene.

Zweite Lösung
Man setze $x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{c+a-b}{2}$ und $z = \frac{a+b-c}{2}$; dann ist $a = y+z-x,\ b = z+x-y,\ c = x+y-z$ sowie $x, y, z > 0$, und die gegebene Ungleichung geht über in

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \geq 6xyz,$$

und dies gilt gemäß der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.*

Dritte Lösung
Durch Ausklammern und Umordnen erhält man die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq (a^2b + ab^2) + (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2),$$

und dies ist gerade ein *Spezialfall der Ungleichung von* SCHUR.

Aufgabe 27
Man beweise: Für alle reellen $a, b, c > 0$ gilt

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 3\left(\frac{1}{a^3+b^3+4} + \frac{1}{b^3+c^3+4} + \frac{1}{c^3+a^3+4}\right).$$

Lösung
Wegen $a^3+2-3a = (a+2)(a-1)^2 \geq 0$ und der entsprechenden Beziehung für b hat man $a^3+2+b^3+2 \geq 3a+3b$, und dies ist wegen der Voraussetzung $a, b, c > 0$ äquivalent mit $\frac{1}{a^3+b^3+4} \leq \frac{1}{3a+3b}$. Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die weiteren beiden Ungleichungen $\frac{1}{b^3+c^3+4} \leq \frac{1}{3b+3c}$ und $\frac{1}{c^3+a^3+4} \leq \frac{1}{3c+3a}$. Addition aller drei Ungleichungen liefert

$$3\left(\frac{1}{a^3+b^3+4} + \frac{1}{b^3+c^3+4} + \frac{1}{c^3+a^3+4}\right) \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Aufgabe 28
Man beweise, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^2(1+b^4) + b^2(1+a^4) \leq (1+a^4)(1+b^4)$$

und gebe an, wann Gleichheit entritt.

Lösung

$$(a^2+b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \leq a^4 + b^4 + (1 + a^4b^4) = (a^4+1)(1+b^4);$$

denn es gilt $2a^2b^2 \leq 1 + a^4b^4$, wie folgende Äquivalenzumformung zeigt:

$$2a^2b^2 \leq 1 + a^4b^4 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq 1 - 2a^2b^2 + a^4b^4 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq (1-a^2b^2)^2.$$

Also ist $a^2 + b^2 \leq \sqrt{(a^4+1)(1+b^4)}$. Außerdem ergibt sich jetzt

$$(1+a^2b^2)^2 = 1 + 2a^2b^2 + a^4b^4 \leq 1 + (a^4+b^4) + a^4b^4 = (1+a^4)(1+b^4).$$

Also ist $1 + a^2b^2 \leq \sqrt{(1+a^4)(1+b^4)}$. Nun hat man

$$\begin{aligned}(1+a^4)(1+b^4) &= \sqrt{(a^4+1)(1+b^4)} \cdot \sqrt{(1+a^4)(1+b^4)} \\ &\geq (a^2+b^2)(1+a^2b^2) \\ &= a^2 + a^2b^4 + b^2 + a^4b^2 \\ &= a^2(1+b^4) + b^2(1+a^4).\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^2 = b^2 = 1$, und dies ist äquivalent mit $(a; b) \in \{(1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1)\}$.

Bemerkung. Nach der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung gilt

$$(a^4+1)(b^4+1) \geq (\sqrt{a^4b^4}+1)^2 \quad \text{und auch} \quad (a^4+1)(1+b^4) \geq (\sqrt{a^4}+\sqrt{b^4})^2.$$

Hieraus lässt sich ein weiterer Beweis zur vorstehenden Aufgabe bilden.

Aufgabe 29

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $abc = 1$. Man zeige: Dann gilt $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Lösung

Die Bauart der Ungleichung erinnert an einen *Spezialfall der Ungleichung von* SCHUR:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

sowie nach weiterer Abschätzung der rechten Seite mittels der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\left(\sqrt{(xy)^3} + \sqrt{(yz)^3} + \sqrt{(zx)^3}\right)$$

für alle reellen x, y, z, und tatsächlich geht die letztgenannte Ungleichung nach Substitution $x = \sqrt[3]{a^2}$, $y = \sqrt[3]{b^2}$, $z = \sqrt[3]{c^2}$ und wegen $xyz = \sqrt[3]{(abc)^2} = 1$ unter Beachtung der Voraussetzung in die gegebene Ungleichung über, womit deren Gültigkeit gezeigt ist.

Aufgabe 30

Man zeige, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\dfrac{a}{b} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} + \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}} \geq \dfrac{5}{2}$.

Lösung

Nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* findet man nach einem Vorbereitungsschritt direkt

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} &= \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \\
&\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}} \\
&= 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3} > \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 31

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ and $a + b + c = 1$. Man zeige, dass dann gilt

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geq 30.$$

Lösung

Nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel* ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \left(\frac{9}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{81}{a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})} \geq \dots
\end{aligned}$$

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert für die Wurzelterme im Nenner

$$\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{3}=\sqrt{ab\cdot\frac{1}{9}}\le\frac{ab+\frac{1}{9}}{2},\ \text{so dass}\ \sqrt{ab}\le\frac{3ab+\frac{1}{3}}{2}$$

und entsprechende Abschätzungen für die beiden weiteren Wurzelterme:

$$\begin{aligned}\dots&\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{81}{1+3(ab+bc+ca)+1}\\&=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{81}{2+3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{54}{2+3(ab+bc+ca)}+\frac{27}{2+3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+6\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}(2+3(ab+bc+ca))}+\frac{27}{2+3(ab+bc+ca)}\ge\dots\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden zusammen schätzt man wieder nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel* ab, und außerdem benutzt man noch $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$; denn

$$\begin{aligned}&0&&\le(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\\Leftrightarrow\ &0&&\le a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\\\Leftrightarrow\ &3(ab+bc+ca)&&\le a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\\Leftrightarrow\ &3(ab+bc+ca)&&\le(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

So erhält man jetzt

$$\begin{aligned}\dots&\ge\frac{49}{a^2+b^2+c^2+6\cdot\frac{1}{9}(2+3(ab+bc+ca))}+\frac{27}{2+(a+b+c)^2}\\&\ge\frac{49}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+\frac{4}{3}}+\frac{27}{2+(a+b+c)^2}\\&=\frac{49}{(a+b+c)^2+\frac{4}{3}}+\frac{27}{2+(a+b+c)^2}\\&=\frac{49}{1+\frac{4}{3}}+\frac{27}{3}\\&=30.\end{aligned}$$

Aufgabe 32

a,b,c seien nicht-negative reelle Zahlen, und sei $a+b+c=1$. Man beweise: $\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{c}{1+ab}\ge\dfrac{9}{10}$.

Erste Lösung

Durch die Substitution $a=\frac{x}{x+y+z},\ b=\frac{y}{x+y+z},\ c=\frac{z}{x+y+z}$ mit $x,y,z>0$ erhält man aus der gegebenen Ungleichung

$$\frac{x^2}{x(x+y+z)^2+xyz}+\frac{y^2}{y(x+y+z)^2+xyz}+\frac{z^2}{z(x+y+z)^2+xyz}\ge\frac{9}{10(x+y+z)},$$

und Anwendung der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* liefert

$$(x+y+z)^3\ge 27xyz,$$

und dies gilt nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*.

Zweite Lösung
Zunächst kann man die Terme auf der linken Seite der Ungleichung erweitern:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}=\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}+\frac{c^2}{c+abc}$$

Nach der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* gilt

$$\left(\left(\sqrt{a+abc}\right)^2+\left(\sqrt{b+abc}\right)^2+\left(\sqrt{c+abc}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{\frac{a^2}{a+abc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b^2}{b+abc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c^2}{c+abc}}\right)^2\right)$$
$$\geq\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}\right)^2=(a+b+c)^2,$$

und hieraus erhält man nach Division durch $\left(\sqrt{a+abc}\right)^2+\left(\sqrt{b+abc}\right)^2+\left(\sqrt{c+abc}\right)^2$ und später nach der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}+\frac{c^2}{c+abc}&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+abc)+(b+abc)+(c+abc)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc}\\&=\frac{1}{1+3abc}\\&\geq\frac{1}{1+3\cdot(\frac{a+b+c}{3})^3}\\&\geq\frac{1}{1+3\cdot(\frac{1}{3})^3}\\&=\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau im Falle $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Aufgabe 33
Seien x,y,z positive reelle Zahlen, so dass $x+y+z=1$ ist. Man beweise, dass dann folgende Ungleichung gilt:

$$x\sqrt[3]{1+y-z}+y\sqrt[3]{1+z-x}+z\sqrt[3]{1+x-y}\leq 1.$$

Lösung
Mittels der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* findet man zunächst

$$\sqrt[3]{1+y-z}=\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot(1+y-z)}\leq\frac{1+1+(1+y-z)}{3}=1+\frac{y-z}{3}.$$

(entsprechend auch für z,x bzw. x,y.) Wegen $x+y+z=1$ erhält man damit

$$x\sqrt[3]{1+y-z}+y\sqrt[3]{1+z-x}+z\sqrt[3]{1+x-y}\leq x\left(1+\frac{y-z}{3}\right)+y\left(1+\frac{z-x}{3}\right)+z\left(1+\frac{x-y}{3}\right)=1.$$

Aufgabe 34
Man zeige: Für alle $a,b,c\in\mathbb{R}^+$mit $a+b+c=1$ gilt: $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}\leq\dfrac{9}{10}$.

Lösung

Die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert $1+a^2 = a^2 + 9 \cdot \frac{1}{9} \geq 10 \cdot \sqrt[10]{\frac{a^2}{9^9}}$ und Entsprechendes für $1+b^2$ und $1+c^2$. Also hat man zunächst

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} &\leq \frac{a}{10 \cdot \sqrt[10]{\frac{a^2}{9^9}}} + \frac{b}{10 \cdot \sqrt[10]{\frac{b^2}{9^9}}} + \frac{a}{10 \cdot \sqrt[10]{\frac{c^2}{9^9}}} \\ &= \frac{1}{10}\sqrt[5]{3^9}\left(a^{\frac{4}{5}} + b^{\frac{4}{5}} + c^{\frac{4}{5}}\right).\end{aligned}$$

Nach der *Potenzmittelwert-Ungleichung* gilt jetzt

$$\left(\frac{1}{3}\left(a^{\frac{4}{5}} + b^{\frac{4}{5}} + c^{\frac{4}{5}}\right)\right)^{\frac{5}{4}} \leq \left(\frac{1}{3}\left(a^{\frac{1}{1}} + b^{\frac{1}{1}} + c^{\frac{1}{1}}\right)\right)^{\frac{1}{1}}$$

bzw. nach Umformung

$$a^{\frac{4}{5}} + b^{\frac{4}{5}} + c^{\frac{4}{5}} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}(a+b+c)\right)^{\frac{4}{5}}.$$

Damit kann man unter Beachtung der Voraussetzung weiter abschätzen:

$$\frac{1}{10}\sqrt[5]{3^9}\left(a^{\frac{4}{5}} + b^{\frac{4}{5}} + c^{\frac{4}{5}}\right) \leq \frac{1}{10} \cdot 3^{\frac{9}{5}} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{9}{10}.$$

Somit gilt die vorgelegte Ungleichung.

Aufgabe 35

Die positiven reellen Zahlen x, y, z seien so gewählt, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Man zeige, dass dann gilt

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Lösung

Aus $0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ folgt $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ und hieraus nach Addition von $2(ab+bc+ca)$

$$3(ab+bc+ca) \leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2.$$

Setzt man nun $a = xy,\ b = yz,\ c = zx$, so erhält man zusammen mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned} & 3(xy^2z + yz^2x + zx^2y) \leq (xy+yz+zx)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 3xyz(x+y+z) \qquad\quad \leq (xy+yz+zx)^2\end{aligned}$$

und wegen $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$ sowie der Voraussetzung jetzt

$$3xyz(x+y+z) \leq 1.$$

Somit gilt die Behauptung.

Aufgabe 36 (aus: 41. IMO 2000, Aufgabe 2**)**

Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $abc = 1$ zeige man die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Lösung
Wegen $abc = 1$ kann man $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ mit $x, y, z > 0$ substituieren. Dann wird die gegebene Ungleichung zu

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) &\le 1 \\ \Leftrightarrow \quad &(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) &\le xyz, \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt, da es sich um eine Sonderform der (symmetrischen) SCHUR-Ungleichung handelt.
Ohne Bezug auf die SCHUR-*Ungleichung* kann man die Gültigkeit auch folgendermaßen zeigen. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \ge y \ge z$; dann gilt $x - y + z > 0$ und $y - z + x > 0$. Sollte nun $z - x + y \le 0$ sein, gilt die Ungleichung trivialerweise, weil die linke Seite dann ≤ 0 und die rechte Seite > 0 ist.
Falls jedoch $z - x + y > 0$, so kann man $p = x - y + z,\ q = y - z + x,\ r = z - x + y$ substituieren, wobei $p, q, r > 0$ ist. Damit lautet die Ungleichung

$$pqr \le \frac{p+q}{2} \cdot \frac{q+r}{2} \cdot \frac{r+p}{2},$$

und bei dieser Ungleichung handelt es sich wegen $pqr = \sqrt{(pqr)^2} = \sqrt{pq \cdot qr \cdot rp}$ um die *Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel*.

Aufgabe 37
Für alle positiven reellen Zahlen x, y, z beweise man die Ungleichung

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \ge \frac{x + y + z}{3}.$$

Lösung
Zunächst werde gezeigt, dass für den ersten Summanden auf der linken Seite der gegebenen Ungleichung gilt:

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \ge \frac{2x - y}{3}.$$

Äquivalenzumformungen liefern

$$\begin{aligned} &3x^3 - 2x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + x^2y + xy^2 + y^3 &\ge 0 \\ \Leftrightarrow \quad &x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 &\ge 0 \\ \Leftrightarrow \quad &(x - y)(x^2 - y^2) &\ge 0, \end{aligned}$$

und diese Ungleichung gilt wegen $\operatorname{sgn}(x - y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2)$. Entsprechende Ungleichungen gelten nun auch für die übrigen Summanden auf der linken Seite der gegebenen Ungleichung. Durch Addition erhält man

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \ge \frac{2x - y}{3} + \frac{2y - z}{3} + \frac{2z - x}{3} = \frac{x + y + z}{3}.$$

Somit gilt die gegebene Ungleichung.

Aufgabe 38
Für alle positiven reellen Zahlen x, y, z mit $xyz = 1$ beweise man die Ungleichung

$$\frac{x^4}{y^4 + y + z} + \frac{y^4}{z^4 + z + x} + \frac{z^4}{x^4 + x + y} \ge 1.$$

Lösung
Nach der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* erhält man zunächst

$$
\begin{aligned}
&(y^4+y+z+z^4+z+x+x^4+x+y)\left(\frac{x^4}{y^4+y+z}+\frac{y^4}{z^4+z+x}+\frac{z^4}{x^4+x+y}\right)\geq (x^2+y^2+z^2)^2\\
\Leftrightarrow\ &(x^4+y^4+z^4+2(x+y+z))\left(\frac{x^4}{y^4+y+z}+\frac{y^4}{z^4+z+x}+\frac{z^4}{x^4+x+y}\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2,
\end{aligned}
$$

also

$$\frac{x^4}{y^4+y+z}+\frac{y^4}{z^4+z+x}+\frac{z^4}{x^4+x+y}\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+2(x+y+z)}.$$

Man ist fertig, wenn man zeigen kann, dass die rechte Seite dieser Ungleichung ≥ 1 ist. Durch Äquivalenzumformungen findet man unter Benutzung der Voraussetzung $xyz=1$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+2(x+y+z)} &&\geq 1\\
\Leftrightarrow\quad &(x^2+y^2+z^2)^2 &&\geq x^4+y^4+z^4+2(x+y+z)\\
\Leftrightarrow\quad &2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) &&\geq 2(x+y+z)\\
\Leftrightarrow\quad &2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) &&\geq 2xyz(x+y+z)\\
\Leftrightarrow\quad &x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2 &&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis geliefert.

Aufgabe 39 (aus: 46. IMO 2005, Aufgabe 3)
Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $xyz \geq 1$. Man beweise:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0.$$

Erste Lösung
Für eine Abschätzung ist es wünschenswert, für die drei Summanden Nennergleichheit zu erreichen. Dazu wird zunächst gezeigt, dass

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geq \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}$$

gilt, und dies ergibt sich so:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} &= \frac{x^2(x^3-1)x^3(x^2+y^2+z^2)-x^2(x^3-1)(x^5+y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)x^3(x^2+y^2+z^2)}\\
&= \frac{x^2(x^3-1)(x^5+x^3y^2+x^3z^2-x^5-y^2-z^2)}{(x^5+y^2+z^2)x^3(x^2+y^2+z^2)}\\
&= \frac{x^2(x^3-1)((x^3-1)y^2+(x^3-1)z^2)}{(x^5+y^2+z^2)x^3(x^2+y^2+z^2)}\\
&= \frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)x^3(x^2+y^2+z^2)}\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Analoge Ungleichungen gelten auch für zyklische Vertauschung der Variablen.
Weiter entnimmt man aus der Voraussetzung $xyz\geq 1$, dass

$$\frac{1}{x}\leq yz,\qquad \frac{1}{y}\leq zx,\qquad \frac{1}{z}\leq xy.$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx &= \frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)\\
&= \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt kann man damit nun abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\\
\geq\ &\frac{x^2(x^3-1)}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^2(y^3-1)}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^2(z^3-1)}{z^3(x^2+y^2+z^2)}\\
=\ &\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\right)\\
\geq\ &\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\
=\ &\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\\
\geq\ &0,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

Zweite Lösung

Durch äquivalente Umformung lassen sich die Terme in der gegebenen Ungleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{x^5+y^2+z^2-x^2-y^2-z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5+z^2+x^2-x^2-y^2-z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5+x^2+y^2-x^2-y^2-z^2}{z^5+x^2+y^2} &\geq 0\\
1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} &\geq 0\\
\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2} &\leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $xyz \geq 1$ liefert die CAUCHY-SCHWARZ*sche Ungleichung*

$$\begin{aligned}
(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) &= ((x^2\sqrt{x})^2+y^2+z^2)\cdot((\sqrt{yz})^2+y^2+z^2)\\
&\geq (x^2\sqrt{x}\cdot\sqrt{yz}+y\cdot y+z\cdot z)^2\\
&= (x^2\sqrt{xyz}+y^2+z^2)^2\\
&\geq (x^2+y^2+z^2)^2.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichungskette entnimmt man unter Mitbenutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \leq \frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Analog findet man durch zyklische Vertauschung

$$\frac{1}{x^2+y^5+z^2} \leq \frac{\frac{x^2+z^2}{2}+x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

und

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^5} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Addition dieser letzten drei Ungleichungen liefert nun

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2} \\ \le\; & \frac{\frac{1}{2}(y^2+z^2+x^2+z^2++x^2+y^2)+y^2+z^2+x^2+z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ =\; & \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ =\; & \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)}, \end{aligned}$$

und damit ist die Gültigkeit der - zur gegebenen äquivalenten - obigen Ungleichung gezeigt.

Aufgabe 40 (49. Mathematik-Olympiade 2009/10, Nr. 491342**)**
Es seien a, b, c paarweise verschiedene reelle Zahlen. Man beweise, dass gilt

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \ge 5.$$

Erste Lösung durch geschickte Termumformungen bei größerem rechnerischen Aufwand

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+1\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+1\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+1\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2+\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-c}+\frac{2c}{c-a}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2-\frac{2ab}{(a-b)(b-c)}-\frac{2bc}{(b-c)(c-a)}-\frac{2ca}{(c-a)(a-b)}+\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-c}+\frac{2c}{c-a}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2-\frac{2ab-2a(b-c)}{(a-b)(b-c)}-\frac{2bc-2b(c-a)}{(b-c)(c-a)}-\frac{2ca-2c(a-b)}{(c-a)(a-b)}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2-\frac{2ac}{(a-b)(b-c)}-\frac{2ba}{(b-c)(c-a)}-\frac{2cb}{(c-a)(a-b)}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2-2\cdot\frac{ac(c-a)+ba(a-b)+cb(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2+2\cdot\frac{ac^2-a^2c+a^2b-ab^2+b^2c-bc^2}{ac^2-a^2c+a^2b-ab^2+b^2c-bc^2}+3 \\ &= \left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)^2+2+3 \\ &\ge 5. \end{aligned}$$

Zweite Lösung durch Substitution und Termumformung
Setzt man

$$x=\frac{2a-b}{a-b}, \quad y=\frac{2b-c}{b-c} \quad \text{und} \quad z=\frac{2c}{c-a},$$

dann ist

$$(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c} \cdot \frac{c}{c-a} = \frac{b}{a-b} \cdot \frac{c}{b-c} \cdot \frac{a}{c-a} = (x-2)(y-2)(z-2),$$

und durch Vergleich von linker und rechter Seite erhält man

$$\begin{gathered} xyz - xz - yz + z - xy + x + y - 1 = xyz - 2xz - 2yz + 4z - 2xy + 4x + 4y - 8 \\ xy + yz + zx = 3(x+y+z) - 7. \end{gathered}$$

Damit findet man weiter unter Benutzung der 2. binomischen Formel

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 = x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 6(x+y+z) + 14 = (x+y+z-3)^2 + 5 \geq 5,$$

wie behauptet.

Dritte Lösung durch geschickte Substitution und „einfache“ Termumformung
Für $a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$ ergibt sich die Behauptung sofort, wie z. B. für $a = 0$ gezeigt sei:

$$1 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + 4 \geq 5.$$

Anderenfalls, d. h. für $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$ erhält man mittels der Substitution $x = \frac{b}{a}$ und $y = \frac{c}{b}$, also $\frac{a}{c} = \frac{1}{xy}$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 - 5 \\ =& \left(\frac{a}{a-b} + 1\right)^2 + \left(\frac{b}{b-c} + 1\right)^2 + \left(\frac{c}{c-a} + 1\right)^2 - 5 \\ =& \left(\frac{1}{1-x} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{1-y} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{xy}} + 1\right)^2 - 5 \\ =& \frac{\left(x^2y(y-2) - x(2y^2-3y-1) + y - 2\right)^2}{(1-x)^2(1-y)^2(xy-1)^2} \\ \geq& \, 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Aufgabe 41

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \quad \textit{für alle positiven reellen } x, y, z.$$

Lösung
Schafft man zunächst die Wurzeln fort, so erhält man

$$\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\right)^2 \geq \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3.$$

Auf beiden Seiten stehen jetzt symmetrische Polynome, die man durch *elementarsymmetrische Funktionen in* x, y, z darstellen kann:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz,$$

diese Funktionen sind also $p = x + y + z,\ q = xy + yz + zx$ und $r = xyz$, so dass man die Ungleichung umschreiben kann in

$$\left(\frac{pq - r}{8}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{3}\right)^3.$$

Nun gilt aber $pq - 9r \geq 0$; denn zweimalige Anwendung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* liefert

$$pq = (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz = 9r.$$

Einsetzung von $r \leq \frac{pq}{9}$ in die obige Ungleichung führt zu $\left(\frac{pq}{9}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{3}\right)^3$, vereinfacht also $p^2 \geq 3q$, und diese Ungleichung gilt; denn wie schon an anderer Stelle gezeigt (oder man sich jetzt kurz überlegen muss), gilt sogar für alle reellen Zahlen x, y, z

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Damit ist die Gültigkeit der gegebenen Ungleichung bewiesen.

Aufgabe 42

Man beweise oder widerlege: Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right) \geq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} + \left(\frac{a}{b + c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c + a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a + b}\right)^2.$$

Lösung

Die Ungleichung ist nicht allgemeingültig; denn setzt man z. B. für zwei der drei Zahlen a, b, c den Wert 3 und für die dritte den Wert 1 ein, so liefert die Ungleichung die falsche Aussage $\frac{1002}{360} \geq \frac{1015}{360}$.

Bemerkung. Lässt man es zu, dass höchstens eine der drei positiven reellen Zahlen a, b, c auch den Wert Null annehmen darf, dann existieren immer noch alle Terme, aber die Widerlegung der Behauptung gestaltet sich jetzt rechnerisch einfacher. Man wähle $a = b = 1$ und $c = 0$; dann ergibt die linke Ungleichungsseite $\frac{3}{2}(1 + 1 + 0) = 3$ und die rechte Ungleichungsseite $1+1+0+1^2+1^2+0^2 = 4$, und damit erhält man die falsche Ungleichung $3 \geq 4$.

Aufgabe 43

$x, y, z \in \mathbb{R}^+$ seien so gewählt, dass $xyz \geq xy + yz + zx$ gilt. Man beweise, dass dann auch $xyz \geq 3(x + y + z)$ gilt.

Lösung

Die Ungleichung $xyz \geq xy + yz + zx$ ist äquivalent mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1.$$

Damit hat man (vgl. den Beweis zu Aufgabe 29)

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \leq \frac{1}{3}$$

und daher $3(x + y + z) \leq xyz$.

Aufgabe 44

Für $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gelte $a + b + c = 1$. Man zeige, dass dann $\dfrac{a^3}{a^2 + b^2} + \dfrac{b^3}{b^2 + c^2} + \dfrac{c^3}{c^2 + a^2} \geq 1$ gilt.

Lösung
Unter Benutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* findet man für den ersten Summanden auf der linken Ungleichungsseite

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}$$

und Entsprechendes für die beiden weiteren Summanden. Damit hat man sofort

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq a - \frac{b}{2} + b - \frac{c}{2} + c - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c) \geq \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 45
Man zeige: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ *mit* $x+y+z=1$ *gilt* $\dfrac{x^2+y}{x+y} + \dfrac{y^2+z}{y+z} + \dfrac{z^2+x}{z+x} \geq 2.$

Lösung
Zunächst ist zu bemerken, dass die Summanden auf der linken Seite der Ungleichung nur dann existieren, wenn höchstens ein der drei Variablen x, y, z den Wert Null annimmt.
Die linke Seite der gegebenen Ungleichung kann man sodann umformen in

$$\frac{x^2+y}{x+y} + \frac{y^2+z}{y+z} + \frac{z^2+x}{z+x} = \left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}\right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x}\right).$$

Nun lassen sich die Klammerausdrücke auf der rechten Seite mittels der CAUCHY-SCHWARZ-*schen Ungleichung* abschätzen; für den linken Ausdruck findet man

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}\right)(x+y \ + \ y+z \ + \ z+x) \\
&= \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{z+x}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x+y}\right)^2 + \left(\sqrt{y+z}\right)^2 + \left(\sqrt{z+x}\right)^2\right) \\
&\geq (x+y+z)^2,
\end{aligned}$$

wegen $x+y+z=1$ also

$$\left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}.$$

Für den rechten Klammerausdruck findet man ganz entsprechend

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x}\right)(y(x+y) + z(y+z) + x(z+x)) \\
&= \left(\left(\sqrt{\frac{y}{x+y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{z}{y+z}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{z+x}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{y(x+y)}\right)^2 + \left(\sqrt{z(y+z)}\right)^2 + \left(\sqrt{x(z+x)}\right)^2\right) \\
&\geq (y+z+x)^2,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} \\
&\geq \frac{3(xy+yz+zx)}{2(xy+yz+zx)} \\
&= \frac{3}{2}\ ;
\end{aligned}$$

denn man hat ja sogar für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& 0 && \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 && \leq x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\
\Leftrightarrow\quad & xy + yz + zx && \leq x^2 + y^2 + z^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 3(xy + yz + zx) && \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\
\Leftrightarrow\quad & 3(xy + yz + zx) && \leq (x + y + z)^2 .
\end{aligned}$$

Zusammenfassung der beiden Zwischenergebnisse liefert

$$\frac{x^2 + y}{x + y} + \frac{y^2 + z}{y + z} + \frac{z^2 + x}{z + x} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2,$$

und somit gilt die Behauptung.
Abschließend sei noch bemerkt, dass der Gleichheitsfall genau für $x = y = z = \frac{1}{3}$ eintritt.

Aufgabe 46
Die reellen Zahlen x, y, z seien so vorgegeben, dass $0 \leq x \leq y \leq z$ (siehe Hinweis am Ende der Lösung). Man beweise, dass dann gilt:

$$\frac{x}{\sqrt{x + y}} + \frac{y}{\sqrt{y + z}} + \frac{z}{\sqrt{z + x}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{x + y + z} \, .$$

Lösung
Höchstens darf $x = 0$ sein, damit alle vorkommenden Terme definiert sind. Falls $x = 0$; so erhält man für alle $y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
& \frac{y}{\sqrt{y + z}} + \frac{z}{\sqrt{z}} && \leq \frac{5}{4} \sqrt{y + z} \\
\Leftrightarrow\quad & y + \sqrt{z} \sqrt{y + z} && \leq \frac{5}{4} (y + z) \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{z(y + z)} && \leq \frac{1}{4} (y + 5z) \\
\Leftrightarrow\quad & 16yz + 16z^2 && \leq y^2 + 10yz + 25z^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 && \leq y^2 - 6yz + 9z^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 && \leq (y - 3z)^2 ,
\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt allgemein in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Nach der CAUCHY-SCHWARZ*schen Ungleichung* ist

$$\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x}{x + y}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{y}{y + z}} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{\frac{z}{z + x}} \right)^2 \leq (x + y + z) \left(\frac{x}{x + y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x} \right)$$

Den zweiten Klammerausdruck auf der rechten Seite kann man weiter umformen und nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x + y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x} \\
= {} & \ldots \\
= {} & \frac{3xyz + x^2(2y + z) + y^2(2z + x) + z^2(2x + y)}{2xyz + x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)} \\
= {} & 1 + \frac{xyz + x^2 y + y^2 z + z^2 x}{2xyz + x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)}
\end{aligned}$$

Nun ist $\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{5}{4}$, da $\frac{3}{2} < \frac{25}{16}$. Der Beweis der Behauptung wird also erbracht sein, wenn man zeigen kann, dass der letzte Bruchterm der vorstehenden Umformung $\leq \frac{1}{2}$ ist. Man findet durch Äquivalenzumformungen und unter Beachtung der Voraussetzung $0 \leq x \leq y \leq z$:

$$\begin{array}{lll} & \dfrac{xyz + x^2y + y^2z + z^2x}{2xyz + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)} & \leq \dfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & 2xyz + 2x^2y + 2y^2z + 2z^2x & \leq 2xyz + x^2y + +x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y \\ \Leftrightarrow & x^2y + y^2z + z^2x & \leq x^2z + y^2x + z^2y \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x) \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq \underbrace{(x-y)}_{\leq 0}\underbrace{(y-z)}_{\leq 0}\underbrace{(z-x)}_{\geq 0}. \end{array}$$

Damit ist nun gezeigt, dass für alle x, y, z mit $0 \leq x \leq y \leq z$ gilt:

$$\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{\frac{z}{z+x}}\right)^2 \leq \frac{25}{16}(x+y+z).$$

Nach Radizierung beider Seiten dieser Ungleichung ergibt sich die Behauptung.

Hinweis. Um in der Aufgabenstellung ohne die Voraussetzung $0 \leq x \leq y \leq z$ auszukommen und stattdessen nur $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ zu verlangen, ist ein anderer Beweis erforderlich, wie ihn etwa G.P. HENDERSON in „Crux Mathematicorum“, Vol. 17/1 (Januar 1991), Nr. 1490, geliefert hat und dem hier gefolgt werde.

Zu $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ (wobei höchstens eine der drei Variablen gleich Null sein darf; s.o.) setze man

$$a^2 = y + z, \quad b^2 = z + x, \quad c^2 = x + y.$$

Dann ist $a, b, c > 0$, und es sei angenommen, dass $a \geq b$ und $a \geq c$. Auflösung nach x, y, z ergibt

$$x = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2), \quad y = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), \quad z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

und die gegebene Ungleichung geht über in

$$\frac{1}{c}(-a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{a}(a^2 - b^2 + c^2) + \frac{1}{b}(a^2 + b^2 - c^2) \leq \frac{5}{2\sqrt{2}}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$

Nun gilt

$$\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

denn setzt man $d = \sqrt{b^2 + c^2}$ und quadriert beide Seiten, so ergeben sich folgende Äquivalenzumformungen:

$$\begin{array}{rlll} \left(\dfrac{a+d}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq a^2 + d^2 & \Leftrightarrow & (a+d)^2 & \leq 2(a^2 + d^2) \\ & \Leftrightarrow & a^2 + 2ad + d^2 & \leq 2a^2 + 2d^2 \\ & \Leftrightarrow & 2ad & \leq a^2 + d^2 \\ & \Leftrightarrow & 0 & \leq (a-d)^2, \end{array}$$

und die letzte Ungleichung ist allgemeingültig. Also kann man die rechte Seite von (1) ersetzen durch

$$\frac{5}{4}\left(a + \sqrt{b^2 + c^2}\right).$$

Die linke Seite von (1) kann man umformen in

$$(a+b+c)+\frac{1}{abc}(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b).$$

Hier wechselt der rechte Summand bei Vertauschung von b und c sein Vorzeichen; er ist positiv für $c \geq b$, und dies sei jetzt vorausgesetzt.

Multiplikation mit $4abc$ liefert

$$4abc(a+b+c)+4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \leq 5abc\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

oder stattdessen $f(a) \leq 0$, wobei

$$f(a)=4a^3(c-b)-a^2bc+a\left(4b^3+4b^2c+4bc^2-4c^3-5bc\sqrt{b^2+c^2}\right)+4bc(c^2-b^2).$$

Da $x \geq 0$, so $a \leq \sqrt{b^2+c^2}$, und man hat zu zeigen, dass $f(a)<0$ für

(2) $$b \leq c \leq a \leq \sqrt{b^2+c^2}.$$

Falls $b=c$, so ist $f(a)=-ab^2\left((a-b)+(5\sqrt{2}-7)b\right)<0$.

Falls $b<c$, so hat man $\lim\limits_{a\to-\infty} f(a)<0,\ f(0)>0,\ \lim\limits_{a\to\infty} f(a)>0$

und findet damit

$$f(c)=-bc^2\left(5\sqrt{b^2+c^2}-4b-3c\right)<0$$

wegen

$$25(b^2+c^2)-(4b+3c)^2=(3b-4c)^2>0;$$

außerdem

$$f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)=2bc\left(4b\sqrt{b^2+c^2}-5b^2-c^2\right)=-2bc\left(\sqrt{b^2+c^2}-2b\right)^2 \leq 0.$$

Man erkennt, dass f drei Nullstellen hat: eine ist negativ, eine liegt zwischen 0 und c, und eine ist $\leq \sqrt{b^2+c^2}$. Daher wechselt f für $c \leq a \leq \sqrt{b^2+c^2}$ sein Vorzeichen nicht, und $f(a)$ ist negativ im ganzen Intervall außer möglicherweise bei $\sqrt{b^2+c^2}$.
Die einzige Lösung von $f(a)=0$, die (2) genügt, ist $a=\sqrt{b^2+c^2}$ und auch nur dann, wenn $\sqrt{b^2+c^2}=2b$, d. h. wenn $(a;b;c)=s\cdot(2;1;\sqrt{3})$ mit $s\in\mathbb{R}^+$ und somit $(x;y;z)=t\cdot(0;3;1)$ mit $t\in\mathbb{R}^+$ ist.

Aufgabe 47
Für die nichtnegativen reellen Zahlen a,b,c,d gelte $a+b+c+d=4$. Man beweise: Dann gilt auch

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leq 4.$$

Lösung (von Schülerin Hannah Boß)
Die linke Seite der gegebenen Ungleichung lässt sich teilweise faktorisieren:

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab=(ab+cd)ac+(ad+bc)bd.$$

Nun kann man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $ad + bc \le ab + cd$.
Unter zweimaliger Mitbenutzung der *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel* sowie der Voraussetzung $a + b + c + d = 4$ lässt sich jetzt abschätzen:

$$\begin{aligned}
a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab &\le (ab+cd)ac + (ab+cd)bd \\
&= (ab+cd)(ac+bd) \\
&= \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)}^2 \\
&\le \left(\frac{ab+cd+ac+bd}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(a+d)(b+c)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{(a+d)(b+c)}^2}{2}\right)^2 \\
&\le \left(\frac{(\frac{a+d+b+c}{2})^2}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(\frac{4}{2})^2}{2}\right)^2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

2. Fall: $ab + cd \le ad + bc$.
Der Beweis dieses Falles verläuft analog zum 1. Fall, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 48
Man beweise: Für beliebige reelle Zahlen k, l, m mit $k, l, m \ge 1$ gilt

$$\sqrt{k-1} + \sqrt{l-1} + \sqrt{m-1} \le \sqrt{m(kl+1)}.$$

Lösung (von Schülerin Hannah Boß)
Trivialerweise gilt $\left(\sqrt{(k-1)(l-1)} - 1\right)^2 \ge 0$. Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
& (k-1)(l-1) - 2\sqrt{(k-1)(l-1)} + 1 \ge 0 \\
\Leftrightarrow\ & kl - k - l + 1 - 2\sqrt{(k-1)(l-1)} + 1 \ge 0 \\
\Leftrightarrow\ & kl \ge (k-1) + 2\sqrt{(k-1)(l-1)} + (l-1) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{kl}^2 \ge \left(\sqrt{k-1} + \sqrt{l-1}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{kl} \ge \sqrt{k-1} + \sqrt{l-1} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{kl} + \sqrt{m-1} \ge \sqrt{k-1} + \sqrt{l-1} + \sqrt{m-1}.
\end{aligned}$$

Nun muss noch die linke Seite der letzten Ungleichung nach oben abgeschätzt werden; dies gelingt analog zur vorigen Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{kl(m-1)}-1\right)^2 && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & klm - kl - 2\sqrt{kl(m-1)} + 1 && \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & klm - kl - 2\sqrt{kl(m-1)} + 1 + m && \geq m \\
\Leftrightarrow\ & klm + m && \geq kl + 2\sqrt{kl(m-1)} + (m-1) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{m(kl+1)}^2 && \geq \left(\sqrt{kl} + \sqrt{m-1}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{m(kl+1)} && \geq \sqrt{kl} + \sqrt{m-1}
\end{aligned}$$

Zusammen liefern beide Abschätzungen jetzt

$$\sqrt{k-1} + \sqrt{l-1} + \sqrt{m-1} \leq \sqrt{kl} + \sqrt{m-1} \leq \sqrt{m(kl+1)}$$

und damit die Behauptung.

* ** *** **** ***** **** *** ** *

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι — Quod erat demonstrandum — *Was zu beweisen war*.