Trigonometrie

I. Problemstellung

Bisher wurden im Geometrieunterricht Sätze über Winkel im Dreieck behandelt wie z. B.

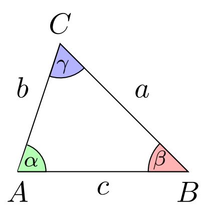
- *In jedem Dreieck beträgt die Summe der drei Innenwinkel* $180\,°$.
- *In jedem Dreieck ist die Summe der Weiten zweier beliebiger Innenwinkel gleich der Weite eines Außenwinkels, der neben dem dritten Innenwinkel liegt.*

Außerdem wurden Sätze im Dreieck behandelt wie z. B. der *Satz des* PYTHAGORAS, der *Höhensatz* und der *Kathetehsatz des* EUKLID.
Über das Verhältnis von Seitenlängen und Winkelweiten wurden nur sehr unbestimmte Aussagen gemacht, z. B:

- *Der längeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der weitere Winkel gegenüber.*

Diese Aussage soll jetzt präzisiert werden. Wir fragen, ob sich etwas über die Weite der Winkel in einem Dreieck aussagen lässt, wenn die Längen der Seiten bekannt sind, und umgekehrt, ob sich über die Längen der Seiten etwas aussagen lässt, wenn die Weite eines Winkels bekannt ist.

II. sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck

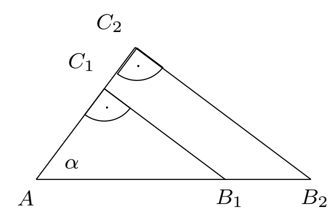


Wir gehen aus von einem (normbeschrifteten, siehe Figur) rechtwinkligen Dreieck ABC aber mit $\gamma = 90\,°$. (Zur Erinnerung: Die Schenkel des rechten Winkels werden *Katheten* genannt, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird *Hypotenuse* genannt.) Die Weite α des Winkels $\angle BAC$ in einem solchen Dreieck betrage beispielsweise $50\,°$. Wir messen die Längen a und c beliebig gewählter Seiten BC bzw. AB und berechnen jeweils den Quotienten $\frac{a}{c}$; es ergibt sich jedes Mal $\frac{a}{c} \approx 0,77$. Das Ergebnis führt zu folgender Vermutung, die sich als zutreffend beweisen lässt.

Voraussetzung: $\gamma_1 = \gamma_2 = 90\,°$; Behauptung: $\dfrac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \dfrac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$.

Beweis: Wegen $B_1C_1 \| B_2C_2$ liefert der zweite Strahlensatz

$$\frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{B_2C_2|}{|AB_2|},$$



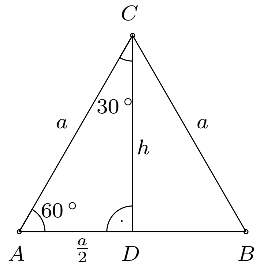
d. h. $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$. Dei Weite α des Winkels $\angle BAC$ lässt sich offenbar durch den konstanten Quotienten $\frac{a}{c}$ beschreiben.

> **Definition 1**
> Man nennt in einem rechtwinkligen Dreieck die einem Winkel gegenüberliegende Seite **Gegenkathete** und die dem Winkel anliegende Kathete **Ankathete** dieses Winkels.

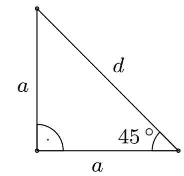
Da es in der Trigonometrie mehr auf die Länge und Weite von Seite bzw. Winkel ankommt als auf die Seite und den Winkel selbst, unterscheidet man nicht mehr streng zwischen Seite und Seitenlänge bzw. Winkel und Winkelweite. Das vereinfacht die Sprechweisse.

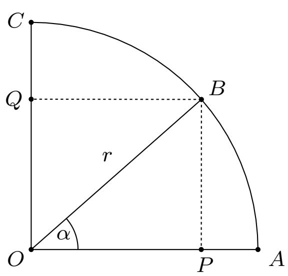
> **Definition 2**
> Sei α die Weite eines beliebigen spitzen Winkels in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck. Unter $\sin(\alpha)$ (gelesen: Sinus von α) versteht man den Quotienten aus Gegenkathete(nlänge) und Hypotenuse(nlänge):
>
> $$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Für die speziellen Winkelweiten $30\,^\circ, 60\,^\circ$ und $45\,^\circ$ lassen sich die zugehörigen Sinuswerte direkt berechnen (vgl. die Figuren):



$$\sin(30\,^\circ) = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$
$$\sin(60\,^\circ) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\sin(45\,^\circ) = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$





Will man die Sinuswerte beliebiger spitzer Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ermitteln, so empfiehlt sich das **Viertelkreisverfahren**. Man zeichnet wie in nebenstehender Figur einen *spitzen* Winkel $\angle AOB$ mit beliebig gewählter Weite α. Vom Schnittpunkt B des Schenkels OB mit dem Viertelkreisbogen (Radius r) fällt man jeweils das Lot auf den Schenkel OA und den Schenkel OC; man erhält so die Lotfußpunkte P und Q. Es ist $|OA| = |OB| = |OC| = r$, und man liest aus der nebenstehenden Figur ab:

$$\sin(0\,^\circ) = \frac{|PB|}{r} = \frac{|OQ|}{r}.$$

Wandert der Punkt B und damit auch der Punkt P zum Punkt A, so wird $|PB| = 0$ und $\sin(0\,^\circ) = \frac{0}{r} = 0$; wandert der Punkt B zum Punkt C und damit der Punkt P zum Punkt O, so wird $|PB| = |OC| = r$ und $\sin(90\,^\circ) = \frac{r}{r} = 1$.

Ergebnisse
1) Alle Sinuswerte von spitzen Winkeln im rechtwinkligen Dreieck liegen zwischen 0 und 1.
2) Mit zunehmender Winkelweite nehmen die Sinuswerte zu.
3) Die Sinuswerte nehmen ungleichmäßig zu.

Definition 3
Sei α die Weite eines beliebigen spitzen Winkels in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck. Unter $\cos(\alpha)$ (gelesen: Cosinus von α) versteht man den Quotienten aus Ankathete(nlänge) und Hypotenuse(nlänge):

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Aus den obigen Figuren zu sin liest man sofort auch folgende Cosinuswerte ab:

$$\cos(30\,^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \cos(60\,^\circ) = \frac{1}{2}; \quad \cos(45\,^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Cosinuswerte beliebiger spitzer Winkel im rechtwinkligen Dreieck findet man mit dem oben erwähnten Viertelkreisverfahren:

$$\cos(\alpha) = \frac{|OP|}{r}, \quad \text{insbesondere} \quad \cos(0\,^\circ) = \frac{r}{r} = 1 \quad \text{und} \quad \cos(90\,^\circ) = \frac{0}{r} = 0\,.$$

Ergebnisse
1) Alle Cosinuswerte von spitzen Winkeln im rechtwinkligen Dreieck liegen zwischen 0 und 1.
2) Mit zunehmender Winkelweite nehmen die Cosinuswerte ab.
3) Die Cosinuswerte nehmen ungleichmäßig ab.

Aus diesen und den vorigen Ergebnissen gewinnen wir sofort den

Satz 1
Der Cosinus eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Sinus des Komplementwinkels:

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Auch ohne Einbeziehung der Hypotenuse lassen sich Winkelweiten erfassen. Dazu die folgende

Definition 4
Sei α die Weite eines beliebigen spitzen Winkels in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck. Unter $\tan(\alpha)$ (gelesen: Tangens von α) versteht man den Quotienten aus Gegenkathete(nlänge) und Ankathete(nlänge):

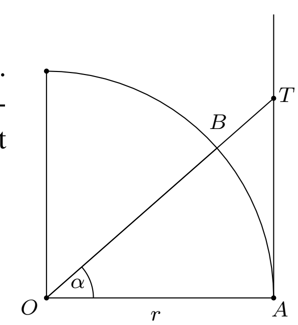
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Wieder aus den Figuren zu sin liest man sofort auch folgende Tangenswerte ab:

$$\tan(30^\circ) = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan(60^\circ) = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$$
$$\tan(45^\circ) = \frac{a}{a} = 1$$

Weitere Tangenswerte ermittelt man aus dem leicht modifizierten Viertelkreisverfahren. Im Punkt A (vgl. nebenstehende Figur) errichtet man die Senkrechte zu OA; sie ist zugleich Tangente an den Viertelkreis. Den Schenkel OB des Winkels $\angle AOB$ verlängert man über B hinaus bis zum Schnittpunkt T mit der Tangente. Es ist $|OA| = r$ und

$$\tan(\alpha) = \frac{|AT|}{r}.$$



Eine Wertetabelle von Tangenswerten liefert folgende

Ergebnisse
1) Die Tangenswerte spitzer Winkel im rechtwinkligen Dreieck nehmen über alle Grenzen zu, wenn deren Winkelweite auf 90° zugeht; die Tangenswerte sind positiv.
2) Mit zunehmender Winkelweite nehmen die Tangenswerte zu.
3) Die Tangenswerte nehmen ungleichmäßig zu.

III. Erweiterung von sin, cos und tan auf W_{90°

Die Menge $W_{90^\circ} = \{\alpha \mid 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$ bezieht die bisher nicht betrachteten Winkelweiten 0° und 90° mit ein. Das auf Seite 2 genannte Viertelkreisverfahren lässt erkennen, dass folgende Festsetzungen sinnvoll sind:

$$\begin{array}{lll} \sin(0^\circ) = 0 & \cos(0^\circ) = 1 & \tan(0^\circ) = 0 \\ \sin(90^\circ) = 1 & \cos(90^\circ) = 0 & \tan(90^\circ) \text{ existiert nicht} \end{array}$$

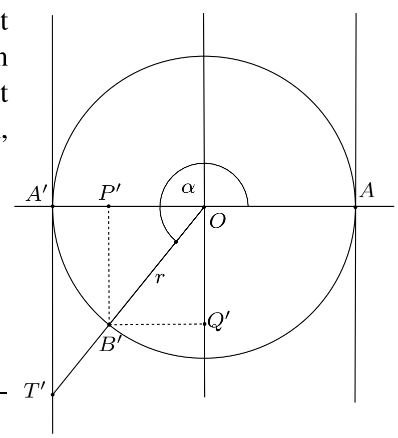
Die Beweise der nachfolgend notierten Formeln lassen sich unmittelbar am rechtwinkligen Dreieck ablesen.

Goniometrische Grundformeln

1. $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \alpha \in W_{90^\circ}$
2. $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \alpha \in W_{90^\circ}$
3. $\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)}, \quad \alpha \in W_{90^\circ} \setminus \{0^\circ; 90^\circ\}$
4. $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \alpha \in W_{90^\circ} \setminus \{0^\circ; 90^\circ\}$
5. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \alpha \in W_{90^\circ}$

IV. Erweiterung von sin, cos und tan auf W_{360°

Zugrundegelegt wird jetzt die Menge $W_{360^\circ} = \{\alpha \mid 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ\}$. Überträgt man das Viertelkreisverfahren sinngemäß auf den Vollkreis, wobei die Richtungen von O nach P' sowie von O nach Q' jeweils ins Negative weisen sollen, so stellt man fest, dass jetzt Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte auch negativ sein können, und man erhält folgende Vorzeichentabelle:



Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−

Mittels des Vollkreisverfahrens weist man unmittelbar die Gültigkeit der erweiterten goniometrischen Grundformeln nach:

Erweiterte goniometrische Grundformeln

4. $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \alpha \in W_{360^\circ} \setminus \{90^\circ; 270^\circ\}$
5. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \alpha \in W_{360^\circ}$
6. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha), \quad \alpha \in W_{180^\circ}$
7. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha), \quad \alpha \in W_{180^\circ}$
8. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha), \quad \alpha \in W_{180^\circ} \setminus \{90^\circ\}$

V. Das Bogenmaß eines Winkels

Die Messung von Winkelweiten im Gradmaß ist eigentlich willkürlich und nur historisch begründet; denn statt den Vollwinkel in 360 Teile zu teilen, könnte man ihn ja auch z. B. in 400 (wie im sog. Gon-Maß) oder in 1000 Teile teilen. Eine willkürfreie Messung von Winkelweiten erhält man dadurch, dass man darauf schaut, wie lang der Kreisbogen im *Einheits*kreis ($r = 1$ LE) ist, der durch die Schenkel eines Winkels begrenzt wird, dessen Scheitelpunkt mit dem Mittelpunkt des Einheitskreises zusammenfällt (vgl. Abb. 2). Die Bogenlänge errechnet man aus

$$b_\alpha = \frac{\alpha}{360\,^\circ} \cdot 2\pi r\,;$$

sie ist abhängig von α und von r. Dagegen ist $\frac{b_\alpha}{r}$ nur noch von α abhängig; daher wird $\frac{b_\alpha}{r}$ als *Bogenmaß des Winkels mit der Weite* α genommen und mit $\mathrm{arc}(\alpha)$ bezeichnet:

$$\mathrm{arc}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_\alpha}{r} = \frac{\alpha}{360\,^\circ} \cdot 2\pi, \quad \text{insbesondere im Einheitskreis} \quad \mathrm{arc}(\alpha) = \frac{b_\alpha}{1\,\mathrm{LE}}.$$

Demnach ist $\mathrm{arc}(\alpha)$ ein reiner reeller Zahlenwert ohne Maßangabe. Um Verwechslungen mit dem Gradmaß zu vermeiden, gibt man allerdings Bogenmaße in der Pseudo-Einheit „rad“ (gelesen: Radiant) an.

Definition 5
Sei $\alpha \in W_{360\,^\circ}$. Unter dem **Bogenmaß eines Winkels**, bezeichnet durch $\mathrm{arc}(\alpha)$ und gelesen: Arcus von α, versteht man die Maßzahl der zugehörigen Bogenlänge b_α im Einheitskreis.

Das Bogenmaß eines Winkels verhält sich zum Umfang des Einheitskreises wie das Gradmaß zum Vollwinkelmaß:

$$\frac{\mathrm{arc}(\alpha)}{2\pi} = \frac{\alpha}{360\,^\circ}.$$

Das kann man sich leicht merken, da hier Verhältnisse „*Teil zu Ganzem*“ verglichen werden. Durch einfache Umformung erhält man hieraus sofort

$$\mathrm{arc}(\alpha) = \frac{\alpha}{180\,^\circ} \cdot \pi \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{arc}(\alpha)}{\pi} \cdot 180\,^\circ.$$

Gradmaß	$1\,^\circ$	$15\,^\circ$	$30\,^\circ$	$36\,^\circ$	$45\,^\circ$	$60\,^\circ$	$72\,^\circ$	$90\,^\circ$	$180\,^\circ$	$360\,^\circ$
Bogenmaß	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

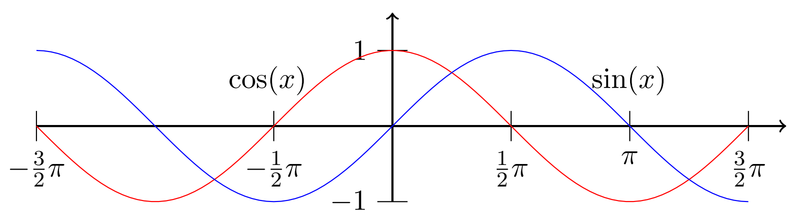


Abbildung 1: Graphen der Sin- und der Cosinus-Funktion.

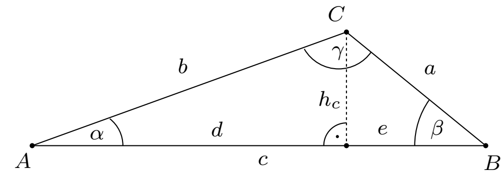
VI. Dreiecksberechnung

Mit den bisherigen Mitteln lassen sich *rechtwinklige* Dreiecke berechnen. Für die Berechnung *beliebiger* Dreiecke benötigt man weitere Sätze, und zwar den Sinussatz für die Fälle WSW und SSW_g und den Kosinussatz für die Fälle SWS und SSS.

Sinussatz
In jedem (nicht ausgeartetem) Dreieck verhalten sich die Längen je zweier Seiten ebenso zueinander wie die Sinuswerte der Gegenwinkel dieser Seiten:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{c}.$$

Beweis
Dem nebenstehenden Dreieck entnimmt man $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$ und $h_c = a \cdot \sin(\beta)$, also $b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$, und hieraus folgt sofort die erste der drei Gleichungen, da in jedem nicht ausgeartetem Dreieck $\beta \neq 0^\circ$ und $b \neq 0$ gilt. Entsprechend zeigt man die beiden anderen Gleichungen.



Kosinussatz
In jedem (nicht ausgeartetem) Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen vermindert um das doppelte Produkt aus den Längen dieser beiden anderen Seiten und dem Kosinuswert des von ihnen eingeschlossenen Winkels:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha), \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma).$$

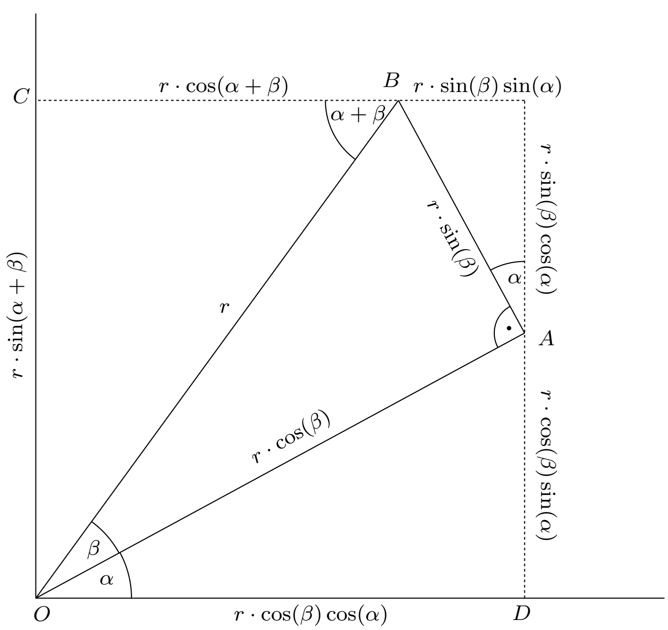
Beweis
Dem Dreieck im vorangehenden Beweis entnimmt man $e = c - d,\ d = b \cdot \cos(\alpha),\ h_c^2 = a^2 - e^2,\ h_c^2 = b^2 - d^2$, und aus den letzten beiden Gleichungen folgt $a^2 - e^2 = b^2 - d^2$, also

$$a^2 = b^2 + e^2 - d^2 = b^2 + (c-d)^2 - d^2 = b^2 + c^2 - 2cd = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha).$$

Entsprechend zeigt man die beiden weiteren Gleichungen im Kosinussatz.

Der Satz des PYTHAGORAS ergibt sich als Spezialfall des Kosinussatzes, nämlich wenn der Kosinuswert gleich Null wird.

VII. Die Additionstheoreme



Aus der Figur liest man ab:

$$\begin{aligned} r \cdot \sin(\alpha + \beta) &= r \cdot \cos(\beta)\sin(\alpha) + r \cdot \sin(\beta)\cos(\alpha), \\ r \cdot \cos(\alpha + \beta) &= r \cdot \cos(\beta)\cos(\alpha) - r \cdot \sin(\beta)\sin(\alpha), \end{aligned}$$

woraus sich nach Division durch r und Umordnung folgende Gleichungen ergeben:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha), \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha), \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

wobei die Gleichungen mit „−“ statt „+“ deswegen gelten, weil $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ und $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$.

Aus den beiden Gleichungen folgen sofort auch entsprechende Gleichungen für den Tangens:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}, \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

Selbstverständlich ist hier darauf zu achten, dass nur solche Winkelweiten gewählt werden dürfen, für die der Nenner auf der rechten Seite der Gleichungen nicht verschwindet.

Aus den Additionstheoremen lassen sich viele Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens herleiten.

Ein bevorzugtes Anwendungsgebiet für die Additionstheoreme außerhalb der Mathematik ist die Schwingungs- und Wellenlehre der Physik.