PEANO-Axiome, insbesondere vollständige Induktion

1. Das Peanosche Axiomensystem für die natürlichen Zahlen

Der italienische Mathematiker GIUSEPPE PEANO (27.08.1858 - 20.04.1932) hat für die natürlichen Zahlen fünf Axiome angegeben, aus denen sich Lehrsätze über diese Zahlen logisch folgern lassen.

Bez.	verbal	formal
P1	0 ist eine natürliche Zahl	$0 \in \mathbb{N}$
P2	Wenn x eine natürliche Zahl ist, so ist stets auch der Nachfolger von x eine natürliche Zahl.	$\bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \to x' \in \mathbb{N})$
P3	Ist x eine natürliche Zahl, so ist stets der Nachfolger von x verschieden von 0.	$\bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \to \neg\, x' = 0)$
P4	Sind x und y natürliche Zahlen und ist der Nachfolger von x gleich dem Nachfolger von y, so ist stets x gleich y. (Injektivität der Nachfolger-Relation)	$\bigwedge_x \bigwedge_y (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x' = y' \to x = y)$
P5	Hat 0 eine beliebige Eigenschaft E und hat stets der Nachfolger einer natürlichen Zahl x diese Eigenschaft E, wenn x diese Eigenschaft hat, so hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft E. („Induktionsaxiom“)	$E0 \wedge \bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \wedge Ex \to Ex') \to \bigwedge_x (x \in \mathbb{N} \to Ex)$

Bei Vermeidung des Grundbegriffes „natürliche Zahl“ ergibt sich folgende Verkürzung vorstehenden Axiomensystems:

P'1	Der Nachfolger von x ist stets von 0 verschieden.	$\bigwedge_x \neg\, x' = 0$ (d. h. $\bigwedge_x x' \neq 0$)
P'2	Wenn der Nachfolger von x gleich dem Nachfolger von y ist, so ist stets $x = y$.	$\bigwedge_x \bigwedge_y (x' = y' \to x = y)$
P'3	Hat 0 eine beliebige Eigenschaft E, und hat stets der Nachfolger von x die Eigenschaft E, wenn x diese Eigenschaft hat, so hat jedes x die Eigenschaft E.	$E0 \wedge \bigwedge_x (Ex \to Ex') \to \bigwedge_x Ex$

Zur Interpretation der Axiome P'1, P'2 und P'3 benötigt man
- einen Individuenbereich ω,
- ein Element **n** für „Null“ und
- eine einstellige Operation $'$ (Nachfolger-Relation).

Für $(\omega, \mathbf{n}, {}')$ gelten dann P'1, P'2 und P'3.

Bemerkung. In der formalen Logik steht $\neg$ für „nicht“ und $\to$ für „wenn ..., so ...“. Für die Sprechweise „daraus folgt“ schreibt man in der Mathematik den Doppelpfeil $\Rightarrow$ und für den Nachfolger einer natürlichen Zahl n üblicherweise $n + 1$.

2. Zur vollständigen Induktion

$A(n)$ stehe für einen Ausdruck, in dem n frei vorkommt, und $\mathbb{N}$ stehe für die Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$, da bei Aussagen, die durch vollständige Induktion beweisbar sind, meistens die Eins als kleinste natürliche Zahl genommen wird.

Statt zu sagen:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A(n) \text{ gilt,}$$

kann man auch sagen:

$$(n \in \mathbb{N} \Rightarrow A(n)) \text{ ist allgemeingültig;}$$

denn

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A(n) \quad \text{ist gleichbedeutend mit} \quad \bigwedge_{n} (n \in \mathbb{N} \Rightarrow A(n))$$

Der *Induktionsanfang* kann demnach so

$$A(1) \text{ gilt}$$

oder so

$$(n = 1 \;\Rightarrow\; A(n)) \text{ ist allgemeingültig}$$

formuliert werden.
Entsprechend hat man für den *Induktionsschritt* (oft fälschlich „Induktionsschluss“ genannt) zu zeigen:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \text{ gilt}$$

oder

$$\big(n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (A(n) \Rightarrow A(n+1))\big) \text{ ist allgemeingültig;}$$

mit Beachtung der Klammerersparungs-Konvention ($\wedge$ bindet enger als $\Rightarrow$) ist dies ist logisch äquivalent mit

$$(n \in \mathbb{N} \wedge A(n) \;\Rightarrow\; A(n+1)) \quad \text{ist allgemeingültig.}$$

Die links stehende Aussageform in dieser Implikation, nämlich

$$n \in \mathbb{N} \wedge A(n),$$

wird häufig *Induktionsvoraussetzung* genannt, und

$$A(n+1)$$

wird *Induktionsbehauptung* genannt.

Die Bezeichnung *Induktionsschluss* sollte dem folgenden Schluss-Schema („modus ponens“) vorbehalten bleiben:

$$\begin{array}{ll}
A(1) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1)) & \text{(hat man gezeigt)} \\
\big(A(1) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1))\big) \Rightarrow \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} A(n) & \text{(gilt nach dem 5. Peano-Axiom)} \\
\hline
\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} A(n) & \text{(wird als Schluss gezogen)}
\end{array}$$

3. Varianten zur vollständigen Induktion
Erste Variante („Indexverschiebung“). Sei $k \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben, B eine Aussageform und B^+ entstehe aus B durch Ersetzung von n durch $n+1$.
Für B gelte

$$(n = k \;\Rightarrow\; B) \;\text{ und }\; \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \big(n \geq k \;\wedge\; B) \;\Rightarrow\; B^+\big).$$

Dann ist $(k \leq n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; B)$ allgemeingültig.

Beweis. A sei die Aussageform, die aus B bei Ersetzung von k durch $n + k - 1$ entsteht. Mit A führe man in der Fassung, wie in **2.** angegeben, die vollständige Induktion durch.

Bemerkung. Bei Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ kann „$k \in \mathbb{N}$“ in der ersten Variante durch „$k \in \mathbb{Z}$“ ersetzt werden.

Zweite Variante (Verallgemeinerung). Analog wie zuvor entstehe C^+ aus C durch Ersetzung von n durch $n + 1$. Für C gelte

$$(n = k \;\Rightarrow\; C) \text{ und } \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \leq n \;\Rightarrow\; C) \;\Rightarrow\; C^+ \right).$$

Dann ist $n \in \mathbb{N} \Rightarrow C$ allgemeingültig.

Beweis. A sei die Aussageform, die man durch folgende Konjunktion erhält:

$$(k = 1 \;\Rightarrow\; C) \wedge (k = 2 \;\Rightarrow\; C) \wedge \ldots \wedge (k = n \;\Rightarrow\; C).$$

Auf A wende man die erste Variante an.

Bemerkung. Man kann beweisen, dass aus der zweiten Variante wieder die in **2.** angegebene Fassung der vollständigen Induktion folgt. Damit hat man dann sogar die Äquivalenz aller drei Fassungen bewiesen.

4. Definition durch Rekursion. Das Summenzeichen

Eng verwandt mit der vollständigen Induktion ist die Rekursion. Darunter versteht man die Zurückführung einer zu definierenden Größe oder Funktion auf eine (oder mehrere) bereits definierte. Als Beispiel betrachte man die rekursive Definition der Potenzierung:

$$\begin{aligned} a^1 &= a & &(a \in \mathbb{R}) \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a & &\text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sukzessive $a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a^2 \cdot a$ usw, und aus vorstehender Definition lassen sich sofort die Potenzgesetze beweisen:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n.$$

Das zur Schreibvereinfachung bei Summenbildungen benutzte *Summenzeichen* $\sum$ lässt sich ebenso rekursiv einführen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1} a_i &= a_1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Analog zu den Potenzen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} a_i &= a_1 + a_2 \\ \sum_{i=1}^{3} a_i &= \sum_{i=1}^{2} a_i + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

usw.

Auch Summenbildung in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ und Produktbildung in $\mathbb{N}$ (ohne Null; falls mit 0, so muss $m \cdot 0 = 0$ an Stelle von $m \cdot 1 = m$ definiert werden) lassen sich rekursiv definieren; dabei steht $n + 1$ für den Nachfolger von n:

Summenbildung:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m \\ m + (n+1) &= (m+n) + 1 \end{aligned}$$

Produktbildung:

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m \\ m \cdot (n+1) &= m \cdot n + m \end{aligned}$$

Kommutativ- Assoziativ- und Distributivgesetz sind mittels dieser Definitionen beweisbare Sätze.

Anwendungsbeispiele:

$$\begin{aligned} 5 + 3 &= 5 + (2+1) \\ &= (5+2) + 1 \\ &= (5 + (1+1)) + 1 \\ &= ((5+1)+1)+1 \\ &= ((5+(0+1))+1)+1 \\ &= (((5+0)+1)+1)+1 \\ &= ((5+1)+1)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 &= 5 \cdot (2+1) \\ &= 5 \cdot 2 + 5 \\ &= (5 \cdot (1+1)) + 5 \\ &= (5 \cdot 1 + 5) + 5 \\ &= (5+5) + 5 \end{aligned}$$

Man beachte, dass im linken Beispiel der „Abbau“ bis zur 0 getrieben werden muss!

5. Induktive Mengen in $\mathbb{R}$

Gründet man den Aufbau des Zahlensystems nicht auf die PEANO-Axiome sondern beginnt sofort mit einer axiomatischen Einführung der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so wird das Induktionsaxiom zu einem beweisbaren Satz, und man spricht auch vom „Prinzip der vollständigen Induktion“. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (hier ohne die Null) stellt dann eine besondere Teilmenge von $\mathbb{R}$ dar. Man führt sie durch folgende Definition ein.

Definition 1
Eine Teilmenge M der reellen Zahlen heißt *induktiv* genau dann, wenn gilt:
(a) die Zahl 1 gehört zu M (formal geschrieben: $1 \in M$) und
(b) wenn die Zahl r zu M gehört, so gehört auch $r + 1$ zu M (formal geschrieben: $r \in M \ \rightarrow \ r + 1 \in M$).

Definition 2
Die Menge $\mathbb{N}$ wird definiert als Durchschnitt aller induktiver Mengen, d. h. als Menge derjenigen Elemente von $\mathbb{R}$, die in jeder induktiven Menge vorkommen.

Weitere Beispiele für induktive Mengen sind $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.

Aus Definition 1 ergeben sich einige

Folgerungen für $\mathbb{N}$
(F1) Es gibt (mindestens) ein Element, nämlich 1, in $\mathbb{N}$ (d. h. $\mathbb{N}$ ist nicht leer).
(F2) $\mathbb{N}$ ist induktiv.
(F3) $\mathbb{N}$ ist Teilmenge jeder induktiven Menge.

Beweis
Zu (F1): 1 liegt in jeder induktiven Menge, damit auch im Durchschnitt aller dieser Mengen, und der ist nach Definition 2 gleich der Menge $\mathbb{N}$.

Zu (F2): Aus (F1) folgt nach Definition 1 Teil (a) für $\mathbb{N} = M$: 1 gehört zu $\mathbb{N}$.
Sei r ein Element von $\mathbb{N}$; dann kommt r in jeder induktiven Menge vor; nach Definition 1 Teil (b) kommt dann auch $r + 1$ in jeder induktiven Menge vor, und hieraus folgt nach Definition 2: $r + 1$ gehört zu $\mathbb{N}$.

Zu (F3): Die Aussage ist eine unmittelbare Folgerung aus Definition 2.

Satz von der vollständigen Induktion
Vorgegeben sei zu jeder natürlichen Zahl n eine Aussage$A(n)$.
Außerdem sei bekannt:
(a) die Aussage $A(1)$ ist richtig (*Induktionsanfang*);
(b) für jede natürliche Zahl n gilt: wenn $A(n)$ richtig ist, so ist auch $A(n + 1)$ richtig (*Induktionsschritt*).
Dann gilt: $A(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen n richtig (*Induktionsschluss*).

Beweis
Sei M die Menge derjenigen natürlichen Zahlen n, für die $A(n)$ richtig ist.
M ist induktiv; denn nach Definition 1 ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und es gilt:
a) 1 gehört zu M (aus Induktionsanfang);
b) wenn m zu M gehört, so gehört auch $m + 1$ zu M;
denn aus $m \in M$ folgt: $A(m)$ ist richtig, und nach dem Induktionsschritt ist dann auch $A(m + 1)$ richtig;
nach dem Induktionsschluss folgt: $m + 1$ gehört zu M.
Damit ist gezeigt: M ist induktiv.
Also ist nach Folgerung (F3) $\mathbb{N}$ in M enthalten.
Andererseits ist M in $\mathbb{N}$ enthalten (nach vorausgesetzter Definition von M).
Zusammengefasst heißt das: $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen
1. Die vollständige Induktion ist nicht konstruktiv in dem Sinne, dass sie uns zu neuen Sätzen führt; sie gestattet nur, eine aufgrund einer Vermutung für richtig gehaltene Aussage exakt zu beweisen.
2. In Beweisen mittels vollständiger Induktion begnügt man sich üblicherweise damit, nur zu zeigen, dass der Induktionsanfang und der Induktionsschritt zutreffen; dass daraus dann nach dem Induktionsschluss die behauptete Aussage richtig ist, wird nicht mehr eigens erwähnt.