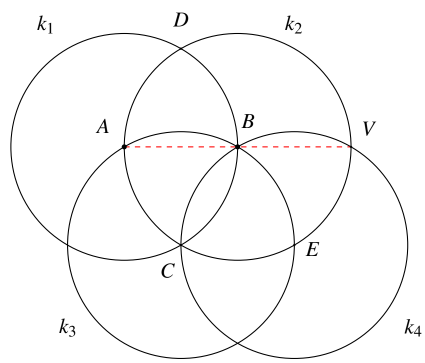
Konstruktionen nur mit dem Zirkel

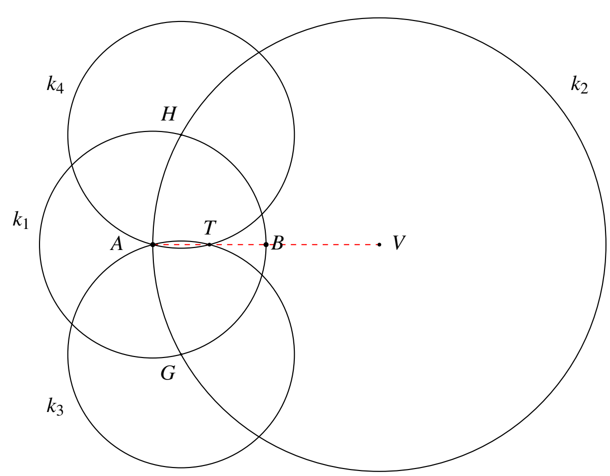
Satz von GEORG MOHR UND LORENZO MASCHERONI (1672 / 1797)
Alles was mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist, ist auch mit dem Zirkel allein konstruierbar.

I. Verdoppeln einer Strecke AB
1. Zeichne den Kreis $k_1(A; |AB|)$ und den Kreis $k_2(B; |AB|)$; die Kreise schneiden sich in den Punkten C und D.
2. Zeichne den Kreis $k_3(C; |BC|)$; er schneidet den Kreis $k_2(B; |AB|)$ in dem schon vorhandenen Punkt A und im Punkt E.
3. Zeichne den Kreis $k_4(E; |BE|)$; er schneidet den Kreis $k_2(B; |AB|)$ in dem schon vorhandenen Punkt C und im Punkt V; dieser ist der Verdopplungspunkt der Strecke AB über B hinaus.
Bemerkung. Durch analoges Fortsetzen der Konstruktion findet man auch das n-fache der Strecke AB.



II. Halbieren einer Strecke AB
Voraussetzung für diese Konstruktion ist, dass man den Verdopplungspunkt V der Strecke AB schon hat. Anderenfalls ist dieser zunächst zu konstruieren (s.o. **I.**).

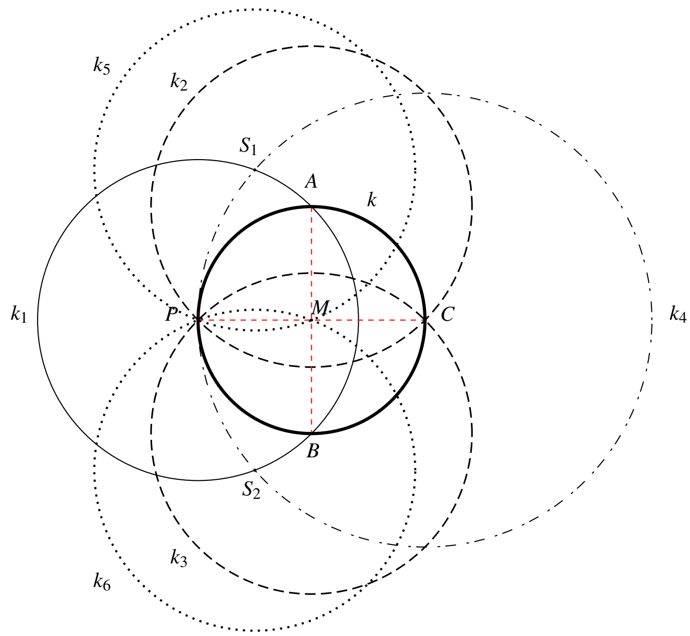
1. Zeichne den Kreis $k_1(A; |AB|)$ und den Kreis $k_2(V; |AV|)$; die Kreise schneiden sich in den Punkten G und H.
2. Zeichne den Kreis $k_3(G; |AG|)$ und den Kreis $k_4(H; |AH|)$; die Kreise schneiden sich in dem schon vorhandenen Punkt A und in dem Punkt T; dieser ist der Halbierungspunkt der Strecke AB.



III. Mittelpunkt eines Kreises konstruieren
Vorgelegt sei ein Kreis k (ohne Mittelpunkt!).

1. Festlegen eines beliebig gewählten Punktes P auf dem Kreis k.
2. Zeichne einen Kreis $k_1(P; r)$, wobei r größer als die Hälfte des Radius von k und kleiner als der Durchmesser

von k sein muss. $k_1(P; r)$ schneidet k in den Punkten A und B.
3. Zeichne den Kreis $k_2(A; |AP|)$ und den Kreis $k_3(B; |BP|)$; die Kreise schneiden sich in dem schon vorhandenen Punkt P und in dem Punkt C.
4. Zeichne den Kreis $k_4(C; |CP|)$; er schneidet den Kreis $k_1(P; r)$ in den Punkten S_1 und S_2.
5. Zeichne den Kreis $k_5(S_1; |PS_1|)$ und den Kreis $k_6(S_2; |PS_2|)$; die Kreise schneiden sich in dem schon vorhandenen Punkt P und in dem Punkt M, dem Mittelpunkt des Kreises k.



IV. Zu einer Gerade die Parallele durch gegebenen Punkt konstruieren
Gegeben seien zwei verschiedene Punkte A und B, die die durch sie verlaufende (aber nicht gezeichnete!) Gerade festlegen; außerdem ein Punkt P, der nicht auf der Gerade liegt. In speziellen Lagen von P relativ zu (AB) (z.B. wenn $P = S_1$; vgl. Fig.) konstruiere man zunächst Punkte A_1 oder B_1 mit $(A_1B_1) = (AB)$ und führe mit diesen Punkten die Konstruktion aus.

1. Zeichne den Kreis $k_1(A; |AB|)$ und den Kreis $k_2(B; |AB|)$; die Kreise schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2; dagei liege S_1 in der gleichen Halbebene von (AB) wie P.
2. Zeichne den Kreis $k_3(S_1; |PS_1|)$ und den Kreis $k_4(A; |BP|)$; die Kreise schneiden sich in den Punkten Q und Q'; dabei soll Q der näher bei B gelegene Punkt sein. Die Gerade durch P und Q ist jetzt Parallele zu der durch A und B verlaufenden Gerade. (Q ist Spiegelpunkt von P bzgl. der Gerade (S_1S_2).)