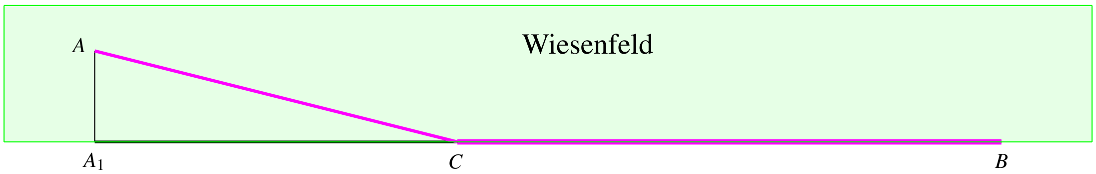
Aufgabe

Ein Student A möchte möglichst schnell zu einem Hochschullehrer B, um ihn wegen der zu schweren Infini-Klausur zu beschimpfen. A befindet sich auf einer Wiese, auf der er mit 4 km/h Geschwindigkeit gehen kann. 100 m entfernt von A verläuft eine Straße nach B, wohin es 1000 m weit ist und auf der er mit 5 km/h gehen kann. Auf welchen Punkt C der Straße muss der Student zusteuern, damit er möglichst schnell zu B gelangt?



Straßenlänge $|A_1B| = 1000$ m = 1 km; Entfernung $|AA_1| = 100$ m = 0,1 km

Lösung

Alle Längen sollen in der Einheit Meter (m) und alle Zeitangaben in der Einheit Stunde (h) genommen sein, sodass nur mit Zahlenwerten gerechnet zu werden braucht.
Sei $x = |A_1C|$; dann ist $|BC| = 1 - x$.
Geschwindigkeit längs der Strecke AA_1: $v_1 = 4$,
Geschwindigkeit längs der Strecke BC: $v_2 = 5$.

Die extremale Größe ist $t = t_1 + t_2$, wobei

t_1: Zeit von A nach C,
t_2: Zeit von C nach B.

Dazu sollen folgende Nebenbedingungen gelten:

$$|AC| = \sqrt{x^2 + |AA_1|^2} \quad \text{mit } |AA_1| = \frac{1}{10}, \text{ also } |AC| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{100}};$$

$$t_1 = \frac{|AC|}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}}{4},$$

$$t_2 = \frac{|BC|}{v_2} = \frac{1-x}{5}.$$

Nun lässt sich die Zielfunktion aufstellen:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}}{4} + \frac{1-x}{5} \text{ mit } x \in [0;1].$$

Gesucht wird zunächst nach einem lokalen Minimum dieser Funktion. Dazu wird die erste Ableitung gebildet:

$$t'(x) = \frac{2x}{4 \cdot 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}} - \frac{1}{5},$$

und es ist zu fragen: für welche $x \in [0;1]$ gilt $t'(x) = 0$?

$$\frac{x}{4 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25}(x^2 + \frac{1}{100}) \Leftrightarrow 9x^2 = \frac{16}{100} \Leftrightarrow x = \frac{2}{15} \vee x = -\frac{2}{15}.$$

Wegen $x \notin [0;1]$ kommt nur $x = \frac{2}{15}$ in Betracht. Zu untersuchen bleibt, welcher Art das Extremum an der Stelle $\frac{2}{15}$ ist:

$$t''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{100}} - x \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{10}}}}{x^2 + \frac{1}{100}} = \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{100}}\right)^3}$$

$$t''(\frac{2}{15}) = \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{225} + \frac{1}{100}}\right)^3} = \frac{1}{400} \cdot 216 = \frac{27}{50} > 0.$$

Da $t'(x) = 0$ und $t''(x) > 0$, hat t bei $\frac{2}{15}$ also ein *lokales* Minimum. Wegen $t(0) = \frac{9}{40} = 0,225$ und $t(1) = \frac{\sqrt{\frac{101}{100}}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{101}}{40} \approx 0,2512$ ist $t_{\min} = t(\frac{2}{15}) = \frac{\sqrt{\frac{4}{225} + \frac{1}{100}}}{4} + \frac{1 - \frac{2}{15}}{5} = \frac{1}{24} + \frac{13}{75} = \frac{387}{1800} = \frac{43}{200} \approx 0,215$ auch *globales* Minimum.

Antwort: Damit der Student möglichst schnell zu dem Hochschullehrer gelangt, muss er auf denjenigen Punkt C zusteuern, der $\frac{2}{15}$ km, d. h. etwa 133 m von A_1 entfernt liegt.