

Umgang mit komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen lassen sich in verschiedener Weise darstellen:

1. *Summendarstellung* oder *algebraische Form*: $z = a + bi = \Re(z) + \Im(z) \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$;
man nennt $\Re(z)$ den *Realteil* von z und $\Im(z)$ den *Imaginärteil* von z .

2. *Trigonometrische* oder *Polarform*: $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ mit $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

dabei $\bar{z} = a - bi$ („*konjugiert-komplexe*“ Zahl z) und $a = r \cdot \cos(\varphi)$, $b = r \cdot \sin(\varphi)$ und

$\varphi = \arctan(\frac{b}{a} + k \cdot \pi)$, wobei $-\frac{\pi}{2} < \arctan(\frac{b}{a}) < \frac{\pi}{2}$ und $k \in \mathbb{Z}$; $\varphi_0 = \arctan(\frac{b}{a})$ ($a \neq 0$) heißt *Hauptwert* von φ .

3. *Betrag-Winkel-Darstellung* oder *Exponentialform*: $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Zwei Beispiele sollen zeigen, wie man jeweils eine dieser Darstellungen in eine der anderen beiden umformt.

1.) Gegeben sei $z = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i$. Es ist $r = |z| = \sqrt{(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)(2 - 2\sqrt{3} \cdot i)} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ und
 $\varphi = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$ (entspricht im Gradmaß 60°), so dass

$$z = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

Man rechnet nach: $(\cos(\frac{1}{3}\pi))^2 + (\sin(\frac{1}{3}\pi))^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Nach der EULER-Gleichung $r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ hat man sofort auch

$$z = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}.$$

2.) Gegeben sei $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Dann ist

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(1 + i) = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot i,$$

und man prüft sofort nach, dass

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Hinsichtlich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und (unter Einschränkung) Division gelten für komplexe Zahlen die gleichen Rechengesetze wie für reelle Zahlen.

Für das Radizieren sind gewisse Einschränkungen zu treffen. Im Reellen wird definiert:

$$\sqrt{a} \text{ ist diejenige nicht-negative reelle Zahl } b, \text{ für die gilt: } b^2 = a.$$

Im Bereich der komplexen Zahlen wird definiert:

$$\sqrt{z} \text{ ist diejenige komplexe Zahl } w, \text{ für die gilt: } w^2 = z \wedge \Re(w) \geq 0 \wedge (\Re(w) = 0 \Rightarrow \Im(w) \geq 0).$$

Beispiele:

1.) $\sqrt{5 - 12i} = 3 - 2i$; denn $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ und $\Re(3 - 2i) = 3 > 0$.

2.) $\sqrt{-9} = 3i$; denn $(3i)^2 = -9$ und $\Im(3i) = 3 \geq 0$.

Dagegen ist $\sqrt{-9} = -3i$ falsch, obwohl auch $(-3i)^2 = -9$; aber jetzt ist $\Im(-3i) = -3 < 0$.
(Man beachte: Hier wurde -9 als komplexe Zahl $-9 + 0 \cdot i$ aufgefasst; im Reellen ist $\sqrt{-9}$ nicht definiert!)

Im Komplexen hat man so zu rechnen: $\sqrt{-9} = \sqrt{9i^2} = \sqrt{9}\sqrt{i^2} = 3i$. Die Gleichung $z^2 + 9 = 0$ hat zwar die Lösungsmenge $\{3i; -3i\}$, aber wie soeben gezeigt, kommt für $\sqrt{-9}$ nur $3i$ in Betracht.

Man fragt sich natürlich, wie man die (Quadrat-)Wurzel aus einer komplexen Zahl bzw. die Lösungsmenge einer Gleichung $z^2 = a + bi$ finden kann.

Die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) lassen sich mit *reellen* (!) Quadratwurzeln so schreiben ($z = u + iv$; s. o.):

$$\begin{aligned} z_k &= (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \cdot \text{sign}(b) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right), \quad (k = 0; 1) \\ &= (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2} (|z_k| + \Re(z_k))} + i \cdot \text{sign}(\Im(z_k)) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (|z_k| - \Re(z_k))} \right) \end{aligned}$$

hierbei ist die sign-Funktion – abweichend von der sonst üblichen Definition! – so definiert (s. u. Beispiel 3):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x \geq 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nur dasjenige der beiden Lösungselemente z_k liefert die Wurzel $\sqrt{a + bi}$, das die oben genannten Bedingungen $z_k^2 = a + bi \wedge \Re(z_k) \geq 0 \wedge (\Re(z_k) = 0 \Rightarrow \Im(z_k) \geq 0)$ erfüllt.

Beispiel

Gesucht sei $\sqrt{-3 + i}$. – Hier ist $a = -3, b = 1$, und die Gleichung $z^2 = -3 + i$ hat die Lösungen

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)},$$

und da nur z_2 die Bedingung $\Re(z_2) \geq 0$ erfüllt, so gilt $\sqrt{-3 + i} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)}$.

Die Umformung

$$i = \frac{1}{2} \cdot 2i = \frac{1}{2} (1 + 2i - 1) = \frac{1}{2} (1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2} (1 + i)^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot (1 + i) \right)^2$$

liefert

$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot (1 + i).$$

Weitere „schöne“ Darstellungen findet man durch Einsetzung von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$; das liefert

$$i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Durch Potenzieren mit i erhält man noch

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder so:} \quad i^i = \sqrt{\frac{1}{e^\pi}}.$$