Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n+10)^4 < 2^{n+10+\sqrt{n+10}}$.

Beweis
Die Behauptung ist äquivalent mit

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 11 \quad \Rightarrow \quad k^4 < 2^{k+\sqrt{k}}),$$

und dies wird durch vollständige Induktion gezeigt.

Induktionsanfang: Für $k = 11$ gilt $11^4 = 14641 < 16384 = 2^{14} < 2^{11+\sqrt{11}}$.
Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $k \geq 11 \quad \Rightarrow \quad k^4 < 2^{k+\sqrt{k}}$.
Zu zeigen: Dann gilt auch $(k+1)^4 < 2^{k+1+\sqrt{k+1}}$.

$$\begin{aligned}
2^{k+1+\sqrt{k+1}} &> 2^{k+1+\sqrt{k}} \\
&= 2 \cdot 2^{k+\sqrt{k}} \\
&> 2 \cdot k^4 \\
&\geq (k+1)^4 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 11;
\end{aligned}$$

denn die letzte Ungleichheit gilt wegen

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 6 \quad \Rightarrow \quad 2k^4 > (k+1)^4),$$

und dies ist wiederum äquivalent mit

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 6 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^2 < \sqrt{2} \cdot k^2),$$

wie nochmals durch vollständige Induktion gezeigt wird.
Induktionsanfang: $(6+1)^2 = 7^2 = 49 < 50,4 = 6^2 \cdot \frac{14}{10} < 6^2\sqrt{2}$.
Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $k \geq 6 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^2 < \sqrt{2} \cdot k^2$.
Zu zeigen: Dann gilt auch $(k+1)^2 < \sqrt{2}(k+1)^2$.

$$\begin{aligned}
(k+2)^2 &= ((k+1)+1)^2 \\
&= (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 \\
&< \sqrt{2} \cdot k^2 + (2k+3) \\
&< \sqrt{2} \cdot k^2 + (2\sqrt{2} \cdot k + \sqrt{2}) \qquad (*) \\
&= \sqrt{2}(k^2 + 2k + 1) \\
&= \sqrt{2}(k+1)^2.
\end{aligned}$$

Begründung von (*): $2k+3 < 2\sqrt{2}\cdot k+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3-\sqrt{2} < 2k(\sqrt{2}-1)$, und die rechte Ungleichung gilt wegen

$$3 - \sqrt{2} < \frac{8}{5} < 2k \cdot \frac{2}{5} < 2k(\sqrt{2}-1)$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Damit ist alles bewiesen.