Gelöste Aufgaben zu Funktionalgleichungen

Ulrich Warnecke, ab November 2011

Zur Lösung von Funktionalgleichungen gibt es keine allgemeine Methode. Man muss für jeden Einzelfall nach geeigneten Lösungsmöglichkeiten suchen. Methoden, die helfen können, sind z. B.:
1. Einsetzen spezieller Werte;
2. Substitution von Argumenten;
3. Einführen einer Hilfsfunktion;
4. doppeltes und mehrfaches Berechnen;
5. Egalisierung von Funktionaltermen;
6. Suche nach Fixpunkten und Nullstellen;
7. vollständige Induktion als Schlüsselmethode für Funktionalgleichungen über $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Aufgabe 1
Für die reellen Funktionen f und g gelte $f\left(x+g(y)\right)=2x+y+5$ für beliebige $x,y\in\mathbb{R}$.
Man bestimme $g\left(x+f(y)\right)$.

Lösung
Aus $f(x+g(y))=2x+y+5$ ersieht man sofort, dass $g(y)$ unabhängig von x ist; also muss $f(x)=2x+r$ mit passendem $r\in\mathbb{R}$ sein. Damit ergibt sich

$$f\left(x+g(y)\right)=2\left(x+g(y)\right)+r=2x+2g(y)+r,$$

so dass $2g(y)+r=y+5$ sein muss. Hiermit rechnet man weiter

$$g(y)=\frac{1}{2}(y+5-r),$$

und unter Beachtung von $f(y)=2y+r$ folgt

$$\begin{aligned} g\left(x+f(y)\right) &= g(x+2y+r)\\ &= \frac{1}{2}\left((x+2y+r)+5-r\right)\\ &= \frac{1}{2}(x+2y+5). \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Man bestimme alle Funktionen $f:\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}$, die für alle $x\in\mathbb{Z}$ die Funktionalgleichung

$$f(x+1)=f(x)+1 \tag{1}$$

erfüllen.

Lösung
Setzt man in (1) $x=0$, so erhält man $f(1)=f(0)+1$.
Für $x=1$ erhält man $f(2)=f(1)+1=(f(0)+1)+1=f(0)+2$.
Für $x=2$ erhält man $f(3)=f(2)+1=(f(0)+2)+1=f(0)+3$.

So fortfahrend erkennt man, dass $f(n)=f(0)+n$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt, was man mit vollständiger Induktion beweisen kann.

Setzt man in (1) speziell $-1; -2; -3$ für x ein, so erhält man jetzt

$$\begin{aligned} f(0) = f(-1)+1 &\quad\Leftrightarrow\quad f(-1) = f(0)-1 \\ f(-1) = f(-2)+1 &\quad\Leftrightarrow\quad f(-2) = f(-1)-1 = (f(0)-1)-1 = f(0)-2 \\ f(-2) = f(-3)+1 &\quad\Leftrightarrow\quad f(-3) = f(-2)-1 = (f(0)-2)-1 = f(0)-3 \end{aligned}$$

und so fortfahrend $f(-n) = f(0) - n$ für alle positiven ganzen Zahlen n, und auch dies lässt sich sofort durch vollständige Induktion beweisen.

Zusammengefasst bekommt man $f(x) = f(0) + x$ für alle ganzen Zahlen x.

Bezeichnet man noch $f(0)$ mit a, so sind die gefundenen Funktionen gegeben durch $f(x) = x + a$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und mit beliebig gewähltem $a \in \mathbb{Z}$. Diese Funktionen sind tatsächlich Lösungen von (1) (Probe!).

Aufgabe 3
Man ermittle alle stetigen Lösungen f der Funktionalgleichung

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = (x+y) \cdot f(x) \cdot f(y) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lösung
Da die Gleichung für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten soll, so muss sie speziell auch für $x = y$ gelten. Die Gleichung sieht dann so aus:

$$2x \cdot f(x) = 2x \cdot (f(x))^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und äquivalente Umformung ergibt

$$2x \cdot f(x) \cdot (1 - f(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet: für alle $x \neq 0$ kann $f(x)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Da f stetig sein soll, sind nur die beiden konstanten Funktionen $x \mapsto 0$ und $x \mapsto 1$ für f als Lösungen möglich. Offensichtlich sind diese beiden Funktionen auch tatsächlich Lösungen der gegebenen Funktionalgleichung.

Aufgabe 4
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2y \cdot f(x) + (f(y))^2.$$

Lösung
Wir setzen zuerst verschiedene Werte für x und y ein:

$$x = y = 0 \quad\Rightarrow\quad f(0) = (f(0))^2 \tag{2}$$
$$y = 0 \quad\Rightarrow\quad f(x^2) = x^2 + (f(0))^2 \tag{3}$$
$$x = 0 \quad\Rightarrow\quad f(y^2) = -2y \cdot f(0) + (f(y))^2 \tag{4}$$
$$x = y \quad\Rightarrow\quad f(0) = x^2 - 2x \cdot f(x) + (f(x))^2 = (f(x) - x)^2 \tag{5}$$

Aus (2) folgt $f(0) = 0 \ \vee\ f(0) = 1$. Wir betrachten diese beiden Fälle.

1. Fall: $f(0) = 0$.
Aus (5) folgt $(f(x) - x)^2 = 0$, also

$$f(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

2. Fall: $f(0) = 1$.
Aus (5) folgt $(f(x) - x)^2 = 1$, also

$$\begin{aligned} & f(x) - x = -1 \ \vee \ f(x) - x = 1 && (6) \\ \Leftrightarrow \ & f(x) = x - 1 \quad \vee \ f(x) = x + 1 && (7) \end{aligned}$$

Angenommen, es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) = b - 1$. In (4) setze man $y = b$; dann folgt

$$f(b^2) = -2b \cdot f(0) + (f(b))^2 = -2b + (b-1)^2 = b^2 + (1 - 4b). \tag{8}$$

Aus (7) folgt mit b^2 statt x

$$f(b^2) = b^2 - 1 \ \vee \ f(b^2) = b^2 + 1,$$

und zusammen mit (8) führt dies zu

$$1 - 4b = -1 \ \vee \ 1 - 4b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2} \ \vee \ b = 0.$$

Wegen $f(0) \neq -1$ ist $b = 0$ unmöglich; aber auch $b = \frac{1}{2}$ ist unmöglich; denn anderenfalls wäre $b = \frac{1}{2}$ die *einzige* reelle Zahl mit $f(b) = b - 1$. Setzt man jedoch in (4) $y = \frac{1}{2}$, so erhält man $f(\frac{1}{4}) = -1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - 1$, also einen Widerspruch. Folglich bleibt im Fall $f(0) = 1$ nur

$$f(x) = x + 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und Einsetzen bestätigt, dass die beiden gefundenen Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto x + 1$ tatsächlich Lösungen der gegebenen Funktionalgleichung sind.

Aufgabe 5
Man ermittle alle streng monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}\,(= \{1; 2; 3; \ldots\})$ *gilt*

$$f(f(n)) = 3n. \tag{9}$$

Lösung
Eine Berechnung der ersten paar Werte von f erfolge in der Hoffnung, daraus eine Regelmäßigkeit entdecken zu können.
Wäre $f(1) = 1$, so auch $f(f(1)) = 1$ im Widerspruch zu $f(f(1)) = 3$.
Angenommen, es wäre $f(1) > 2$; dann wäre $1 < 2 < f(1)$ und wegen der strengen Monotonie auch $2 < f(1) < f(2) < f(f(1))$ und damit $f(f(1)) > 3$ wiederum im Widerspruch zu $f(f(1)) = 3$. Folglich ist $f(1) = 2$.
Gleichung (9) liefert jetzt

$$\begin{array}{lll} \text{für} & n = 1 & f(2) = f(f(1)) = 3 \\ \text{für} & n = 2 & f(3) = f(f(2)) = 6 \\ \text{für} & n = 3 & f(6) = f(f(3)) = 9. \end{array}$$

Da f streng monoton sein soll, gilt außerdem

$$6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9;$$

also muss zwingend $f(4) = 7$ und $f(5) = 8$ sein.
So fortfahrend erhält man für $n = 4; 5; 6$ der Reihe nach die Werte $f(7) = 12; f(8) = 15; f(9) = 18$ und danach für $n = 7; 8; 9$ der Reihe nach $f(12) = 21; f(15) = 24; f(18) = 27$. Aufgrund der vorausgesetzten strengen Monotonie erhält man aus $18 = f(9) < f(10) < f(11) < f(12) = 21$ die zwei Werte $f(10) = 19$ und $f(11) = 20$. Nach weiterer Rechnung liefert so die folgende Tabelle:

n	**1**	**2**	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	**2**	**3**	**6**	7	8	**9**	12	15	**18**	19	20	21	22	23	24

n	16	17	**18**	19	20	21	22	23	24	25	26	**27**	28	29	30
$f(n)$	25	26	**27**	30	33	36	39	42	45	48	51	**54**	55	56	57

Die fetten Hervorhebungen weisen auf die erhoffte Regelmäßigkeit:

$$f(3^0) = 2\cdot 3^0;\ f(2\cdot 3^0) = 3^1;\ f(3^1) = 2\cdot 3^1;\ f(2\cdot 3^1) = 3^2;\ f(3^2) = 2\cdot 3^2;\ f(2\cdot 3^2) = 3^3;\ f(3^3) = 2\cdot 3^3;$$

außerdem geht aus der Tabelle hervor, dass sich der Wert von f jeweils um 1 oder um 3 erhöht, wenn man n durch $n+1$ ersetzt, und dieses Verhalten ändert sich stets bei einer Dreierpotenz bzw. bei dem Doppelten einer Dreierpotenz. Offenbar gibt es nur eine solche Funktion f; sie lässt sich aufgrund der entdeckten Regelmäßigkeit vermutlich darstellen durch

$$\begin{aligned} f(3^k+m) &= 2\cdot 3^k + m \quad \text{für } k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ und } 0\le m<3^k & (10)\\ \text{oder}\ \ f(2\cdot 3^k+m) &= 3^{k+1}+3m \quad \text{für } k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ und } 0\le m<3^k. & (11)\end{aligned}$$

Man beachte hierzu, dass jede natürliche Zahl sich durch genau eine der beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} \text{entweder} \quad & 3^k+m \quad && \text{mit } k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ und } 0\le m<3^k;\\ \text{oder} \quad & 2\cdot 3^k+m \quad && \text{mit } k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ und } 0\le m<3^k\end{aligned}$$

erfassen lässt.

Zwischenbetrachtung: Rechenverlauf für erste Werte von n (vgl. obige Wertetabelle):

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(3^0+0) = 2\cdot 3^0+0=2 & f(f(1)) &= f(2)=3=3\cdot 1\\
f(2) &= f(2\cdot 3^0+0) = 3^1+3\cdot 0=3 & f(f(2)) &= f(3)=6=3\cdot 2\\
f(3) &= f(3^1+0) = 2\cdot 3^1+0=6 & f(f(3)) &= f(6)=9=3\cdot 3\\
f(4) &= f(3^1+1) = 2\cdot 3^1+1=7 & f(f(4)) &= f(7)=12=3\cdot 4\\
f(5) &= f(3^1+2) = 2\cdot 3^1+2=8 & f(f(5)) &= f(8)=12=3\cdot 5\\
f(6) &= f(2\cdot 3^1+0) = 3^2+3\cdot 0=9 & f(f(6)) &= f(9)=18=3\cdot 6
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen, dass f sich tatsächlich in der angegebenen Weise darstellen lässt.

Induktionsanfang: Sei $n=1$; dann ist $n=3^0+0$, d. h. $k=0$ und $m=0$, und nach (10) gilt $f(1)=2$.

Induktionsschritt: Hier sind Fallunterscheidungen zu machen.
Es habe n die Darstellung $n=3^k+m$ mit $0\le m<3^k-1$, und es gelte $f(3^k+m)=2\cdot 3^k+m$; dann ist

$$f(n+1) = f(3^k+(m+1)) = 2\cdot 3^k+(m+1) = (2\cdot 3^k+m)+1 = f(n)+1 > f(n).$$

Falls $m=3^k-1$, so ist $n+1=3^k+(m+1)=3^k+3^k=2\cdot 3^k+0$, und nach (11) gilt

$$f(n+1) = 3^{k+1}+0 = 3\cdot 3^k > 2\cdot 3^k+(3^k-1) = f(n).$$

Nun habe n die Darstellung $n = 2 \cdot 3^k + m$ mit $0 \leq m < 3^k - 1$, und es gelte $f(2 \cdot 3^k + m) = 3^{k+1} + 3m$; dann ist

$$f(n+1) = f(2 \cdot 3^k + (m+1)) = 3^{k+1} + 3(m+1) = (3^{k+1} + 3m) + 3 = f(n) + 3 > f(n).$$

Falls $m = 3^k - 1$, so ist $n + 1 = 2 \cdot 3^k + (m+1) = 2 \cdot 3^k + 3^k = 3^{k+1} + 0$, und nach (10) gilt

$$f(n+1) = 2 \cdot 3^{k+1} + 0 = 3^{k+1} + 3 \cdot 3^k = 3^{k+1} + 3(m+1) = (3^{k+1} + 3m) + 3 = f(n) + 3 > f(n).$$

Damit sind die vermuteten Darstellungen (10) und (11) von f als gültig nachgewiesen.

Aufgabe 6
Man zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(f(n)) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
($\mathbb{N}$ sei die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der Null.)

Lösung (Bearbeitung der Lösung von Hannah Boß, Greven)
Wir konstruieren eine Funktion der verlangten Art. Zunächst wird definiert

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1.$$

Um $f(n)$ auch für $n \geq 2$ definieren zu können, betrachten wir die bis auf die Reihenfolge eindeutige Primfaktorzerlegung von n; aus ihr gewinnt man folgende eindeutige Darstellung:

$$n = m^k, \text{ wobei } k \text{ der größte gemeinsame Teiler aller Exponenten der Primfaktoren sei.}$$

Weiter sei k dargestellt durch

$$k = 3^j \cdot r, \text{ wobei } j \geq 0 \text{ und } r \text{ kein Vielfaches von 3, also insbesondere } r > 0 \text{ sei.}$$

Damit wird jetzt $f(n)$ definiert durch

$$f(n) = f(m^{3^j \cdot r}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} m^{3^{j+1} \cdot r}, & \text{falls } j \text{ gerade,} \\ m^{2 \cdot 3^{j-1} \cdot r}, & \text{falls } j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In jedem Fall gilt $f(n) \in \mathbb{N}$, da $j - 1 \geq 0$ für ungerades j bzw. $j + 1 \geq 1$ für gerades j und außerdem $r > 0$ gilt, m also in beiden Fällen mit einem positiven Exponenten potenziert wird.
Die so definierte Funktion f erfüllt die gestellte Funktionalgleichung für alle $n \in \mathbb{N}$; denn

1.) $f(f(0)) = f(0) = 0 = 0^2$ und $f(f(1)) = f(1) = 1 = 1^2$, wie eingangs definiert;

2.) falls $n = m^{3^j \cdot r}$ und j gerade, so ist $j + 1$ ungerade und

$$f(f(n)) = f(f(m^{3^j \cdot r})) = f(m^{3^{j+1} \cdot r}) = m^{2 \cdot 3^j \cdot r} = (m^{3^j \cdot r})^2 = n^2;$$

3.) falls $n = m^{3^j \cdot r}$ und j ungerade, so ist $j + 1$ gerade und

$$f(f(n)) = f(f(m^{3^j \cdot r})) = f(m^{2 \cdot 3^{j-1} \cdot r}) = m^{2 \cdot 3^j \cdot r} = (m^{3^j \cdot r})^2 = n^2.$$

Damit ist der Existenzbeweis konstruktiv erbracht.

Rechenbeispiele

$$\begin{array}{lcl} f(2) = f(2^{3^0\cdot 1}) = 2^{3^1\cdot 1} = 8 & \text{und} & f(8) = f(2^{3^1\cdot 1}) = 2^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 4 \\ f(3) = f(3^{3^0\cdot 1}) = 3^{3^1\cdot 1} = 27 & \text{und} & f(27) = f(3^{3^1\cdot 1}) = 3^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 9 \\ f(4) = f(2^{3^0\cdot 2}) = 2^{3^1\cdot 2} = 64 & \text{und} & f(64) = f(4^{3^1\cdot 1}) = 4^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 16 \\ f(5) = f(5^{3^0\cdot 1}) = 5^{3^1\cdot 1} = 125 & \text{und} & f(125) = f(5^{3^1\cdot 1}) = 5^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 25 \\ f(6) = f(6^{3^0\cdot 1}) = 6^{3^1\cdot 1} = 216 & \text{und} & f(216) = f(6^{3^1\cdot 1}) = 6^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 36 \\ f(7) = f(7^{3^0\cdot 1}) = 7^{3^1\cdot 1} = 343 & \text{und} & f(343) = f(7^{3^1\cdot 1}) = 7^{2\cdot 3^0\cdot 1} = 49 \end{array}$$

$$f(f(490\,000)) = f(f(2^4\cdot 5^4\cdot 7^2)) = f(f((2^2\cdot 5^2\cdot 7)^2)) = f(f(700^{3^0\cdot 2})) = f(700^{3^1\cdot 2}) = 700^{2\cdot 3^0\cdot 2} = 490\,000^2.$$

Aufgabe 7

Gesucht sind alle Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, so dass $f\left(f(x)+y^2\right) = x+y^2$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Lösung (unter Mithilfe von Ernst Otto Hannemann)

Durch spezielle Einsetzungen wird untersucht, was sich aus der gegebenen Bedingung für f folgern lässt.
1.) Für $y=0$ ist $f\left(f(x)\right) = x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.
2.) Für $x=0$ ist $f\left(f(0)+y^2\right) = y^2$ für alle $y\in\mathbb{R}$, und dies bedeutet $f\left(f(0)+x\right) = x$ für alle $x\in\mathbb{R}_0^+$.

Nimmt man zu gegebenem y jetzt $x = f(0)+y^2$, so erhält man nach 1.) und 2.)

$$f(0)+y^2 = f\left(f(f(0)+y^2)\right) = f(y^2).$$

Also gilt

3.) $$f(0)+y^2 = f(y^2) \text{ für alle } y\in\mathbb{R}.$$

Zu gegebenem x gibt es $y\in\mathbb{R}$ so, dass $f(x)+y^2\geq 0$ ist. Nimmt man ein solches y und setzt $\tilde{y} = \sqrt{f(x)+y^2}$, so erhält man $f(x)+y^2 = \tilde{y}^2$. Dann hat man wegen 3.) $f(\tilde{y}^2) = f(0)+\tilde{y}^2$ und hiermit

$$x+y^2 = f\left(f(x)+y^2\right) = f(\tilde{y}^2) = f(0)+\tilde{y}^2 = f(0)+\left(f(x)+y^2\right),$$

und das liefert $f(x) = x-f(0)$.
Insgesamt hat man nun gefunden: $f(x) = x-f(0)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also auch $f(y^2) = y^2-f(0)$ für alle $y\in\mathbb{R}$.
Dies liefert zusammen mit 3.) $f(0)=0$ und damit schließlich $f(x)=x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.
Somit erfüllt nur die Funktion$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x$ die in der Aufgabenstellung genannte Bedingung.

Aufgabe 8

Man bestimme alle reellen Polynome P, für die gilt:
(1) $P(x^2+1) = (P(x))^2+1$ *und*
(2) $P(0)=0$

Lösung

Setzt man $Q(x) = (P(x))^2+1$ und $R(x) = P(x^2+1)$, so ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1+(P(0))^2 = Q(0) = R(0) = P(1) \\ 2 &= 1+(P(1))^2 = Q(1) = R(1) = P(2) \\ 5 &= 1+(P(2))^2 = Q(2) = R(2) = P(5), \end{aligned}$$

so dass man

$$n^2 + 1 = Q(n) = R(n) = P(n^2 + 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

vermutet. Um das Zutreffen dieser Vermutung zu beweisen, betrachte man die durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_{n+1} &= a_n^2 + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

rekursiv definierte Folge. Dann ist

(3) $$P(a_n) = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wie nun durch vollständige Induktion über n gezeigt wird.
Induktionsanfang: $P(a_0) = P(0) = 0$ gilt nach (2).
Induktionsschritt: Nach Definition von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und nach Induktionsvoraussetzung $P(a_n) = a_n$, aus der sofort $(P(a_n))^2 = a_n^2$ folgt, gilt

$$\begin{aligned} P(a_{n+1}) &= P(a_n^2 + 1) = R(a_n) = Q(a_n) \\ &= (P(a_n))^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Aus (3) ergibt sich nun das durch $P(x) = x$ für alle reellen x definierte Polynom P als das einzige, für das (1) und (2) erfüllt sind.

Vorbemerkung
Wird speziell nach Polynomfunktionen gefragt, die vorgegebene Bedingungen erfüllen sollen, so kann man versuchen, Nullstellen des Polynoms zu finden, falls die gestellten Bedingungen dies ermöglichen. Dann gewinnt man nämlich Faktoren der Form $x-a$ (a Nullstelle) als Teiler des Polynoms und kann daraus eventuell weitere Schlüsse ziehen.

Aufgabe 9
Finde ein Polynom $P(x)$, so dass $P(x)$ durch $x^2 + 1$ und $P(x) + 1$ durch $x^3 + x^2 + 1$ teilbar ist.

Lösung (unter Mithilfe von Ernst Otto Hannemann)
Die gestellten Teilbarkeitsbedingungen besagen, dass es Polynome $Q(x)$ und $R(x)$ geben muss, so dass

$$P(x) = (x^2 + 1)Q(x) \quad \text{bzw.} \quad P(x) + 1 = (x^3 + x^2 + 1)R(x).$$

Hieraus folgt $(x^2 + 1)Q(x) + 1 = (x^3 + x^2 + 1)R(x)$ und nach Umformung

$$(x^2 + 1)\,(Q(x) - R(x)) = x^3 R(x) - 1.$$

Für $x = i$ erhält man aus dieser Gleichung $R(i) = i$, und für $x = -i$ erhält man $R(-i) = -i$; also sind i und $-i$ Nullstellen des Polynoms $R(x) - x$, d. h. $x - i$ und $x + i$ und damit auch $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ teilen das Poylnom $R(x) - x$, und hieraus folgt die Existenz eines Polynoms $S(x)$, so dass $R(x) - x = (x^2 + 1)S(x)$.
Mit $R(x) = (x^2 + 1)S(x) + x$ hat man jetzt einerseits

$$\begin{aligned} P(x) + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + 1 &= (x^3 + x^2 + 1)R(x) \\ &= (x^3 + x^2 + 1)\left((x^2 + 1)S(x) + x\right) \\ &= (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + 1)S(x) + x^4 + x^3 + x \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} P(x) = (x^2 + 1)Q(x) &= (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + 1)S(x) + x^4 + x^3 + x - 1 \\ &= (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + 1)S(x) + (x^2 + x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)\left((x^3 + x^2 + 1)S(x) + (x^2 + x - 1)\right). \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass durch das Polynom $P(x) = x^4 + x^3 + x - 1 + (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + 1)S(x)$ mit beliebig wählbarem Polynom $S(x)$ die gestellten Teilbarkeitsbedingungen erfüllt werden.

Aufgabe 10
Man finde alle Polynome, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

$$1.)\ P(2) = 2 \quad \textit{und} \quad 2.)\ P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x).$$

Lösung
$P(x)$ kann nicht konstant sein, da es sich sonst um das Nullpolynom mit $P(x) = 0$ für alle reellen x handeln müsste, was der Bedingung 1.) widerspräche.
Aus der Bedingung 2.) ergibt sich $P(-x) = P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; daher ist $P(x)$ ein gerades Polynom.
Die Bedingung 2.) zeigt außerdem, dass $P(x)$ einen solchen Grad n hat, dass $2n = 4 + n$, d. h. $n = 4$ ist.
Da $P(0) = 0$, d. h. 0 eine Nullstelle des *geraden* Polynoms $P(x)$ ist, so ist $P(x)$ teilbar durch x^2.
Weiter ist

$$P(-1) = P(i^2) = i^2(i^2 + 1)P(i) = 0,$$

und da $P(x)$ gerade ist, so hat man auch $P(1) = 0$. Damit sind auch 1 und -1 Nullstellen des Polynoms $P(x)$, so dass $P(x)$ auch durch $(x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)$ teilbar ist.
Somit ist $P(x)$ teilbar durch $x^2(x^2 + 1)$, und da der Grad des Polynoms 4 ist, so hat $P(x)$ die Form $P(x) = ax^2(x^2 - 1)$, und aus der Bedingung 1.) findet man jetzt $a = \frac{1}{6}$.
Demnach ist $\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^2(x^2 - 1)}$ das einzige Polynom, das den gegebenen beiden Bedingungen genügt.

Aufgabe 11
Man ermittle alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, so dass $x \cdot P\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot P\left(\frac{x}{y}\right) = x + y$ für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen x und y.

Lösung
Für $y = 1$ hat man zunächst

$$x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1 - P(x).$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung keine negativen Potenzen von x enthält, müssen die in $P(\frac{1}{x})$ enthaltenen negativen Potenzen von x durch den Faktor x aufgehoben werden. Also ist $P(x)$ ein linearer Term: $P(x) = ax + b$ mit reellen Koeffizienten a, b.
Setzt man diesen Term in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man unter Beachtung der Voraussetzung $x \neq 0 \neq y$

$$\begin{aligned} x(a \cdot \frac{y}{x} + b) + y \cdot (a \cdot \frac{x}{y} + b) = x + y &\Leftrightarrow ay + bx + ax + by = x + y \\ &\Leftrightarrow (a + b)(x + y) = x + y \\ &\Leftrightarrow b = 1 - a. \end{aligned}$$

Somit sind alle gesuchten Polynome gegeben durch $P(x) = ax + 1 - a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12
Man ermittle alle stetigen reellen Funktionen f, welche die Funktionalgleichung $f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Lösung
Speziell für $x = y = 0$ ist $f(0) = 0$.
Für $x = 0, y \in \mathbb{R}$ ist $f(y^3) = yf(y^2)$, und für $x \in \mathbb{R}, y = 0$ ist $f(x^3) = xf(x^2)$.
Damit reduziert sich die gegebene Gleichung zu $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$.
Mit der Substitution $a = x^3$, $b = y^3$ geht die Gleichung dann über in $f(a + b) = f(a) + f(b)$, und dies ist eine Gleichung, von der AUGUSTIN CAUCHY (1789 - 1857) im Jahre 1821 gezeigt hat, dass die einzigen stetigen Lösungen nur durch $f(x) = kx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und reeller Konstanten k (die auch gleich 0 sein darf!) gegeben sind.

Aufgabe 13
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) + xf(1-x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung
Setzt man $1 - x$ an Stelle von x in die gegebene Gleichung ein, so erhält man mit dieser zusammen das System

$$\begin{aligned} f(x) + xf(1-x) &= x \\ (1-x)f(x) + f(1-x) &= 1-x. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit x und subtrahiert dann von der ersten Gleichung, so erhält man

$$(1 - x(1-x))f(x) = x - x(1-x).$$

Auflösung nach $f(x)$ ergibt

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Man beachte, dass $x^2 - x + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 14
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(\frac{1}{x}) + f(1-x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Lösung
$\mathcal{A}(x)$ bedeute $f(\frac{1}{x}) + f(1-x) = x$. Man betrachte nun

(a) $\mathcal{A}(\frac{1}{x})$, d. h. $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x}$,

(b) $\mathcal{A}(1-x)$, d. h. $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 1 - x$,

(c) $\mathcal{A}(\frac{x}{x-1})$, d. h. $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{x-1}$.

Dann ergibt (a) + (b) - (c)

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2(x-1)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\},$$

und weil Stetigkeit von f nicht verlangt ist, können für $f(0)$ und $f(1)$ beliebige reelle Werte genommen werden. Die Probe zeigt, dass jede dieser Funktionen die verlangte Eigenschaft hat.

Aufgabe 15
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f\left((f(x))^2 + f(y)\right) = xf(x) + y \ \textit{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lösung
$\mathcal{A}(x,y)$ bedeute $f\left((f(x))^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$, und sei $f(0) = a$.
$\mathcal{A}(0;0)$ heißt dann, dass $f(a^2 + a) = 0$, und $\mathcal{A}(a^2 + a, x)$, dass $f(f(x)) = x$, d. h. f ist eine bijektive und involutorische Abbildung.

$\mathcal{A}(f(1), a)$ heißt $f(1) = f(1) + a$ und daher $a = 0$.

$\mathcal{A}(f(x), f(y))$ besagt $f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$;
$\mathcal{A}(f(x), 0)$ besagt $f(x^2) = xf(x)$.
Subtraktion liefert $f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y)$.
Damit hat man jetzt $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x \geq 0$ und beliebige y, und man folgert sofort, dass dies uneingeschränkt für alle reellen x gilt.

$\mathcal{A}(f(x+1), 0)$ bedeutet $f(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)f(x + 1)$;
$\mathcal{A}(f(x), 0)$ bedeutet $f(x^2) = xf(x)$;
Subtraktion liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& f(x^2 + 2x + 1) - f(x^2) &&= (x + 1)f(x + 1) - xf(x) \\
\Leftrightarrow\quad & f(x^2) + f(2x) + f(1) - f(x^2) &&= (x + 1)(f(x) + f(1)) - xf(x) \\
\Leftrightarrow\quad & 2f(x) + f(1) &&= xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1) - xf(x) \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) &&= xf(1),
\end{aligned}$$

dann aber auch $f(x^2) = x^2 f(1)$ und hiermit

$$f\left((xf(1))^2\right) = xf(1) \cdot f\left(xf(1)\right) = f(x) \cdot f\left(f(x)\right) = f(x) \cdot x = f(x^2).$$

Wegen der eingangs festgestellten Bijektivität von f folgt hieraus $(xf(1))^2 = x^2$, und dies ist äquivalent mit $x^2\left((f(1))^2 - 1\right) = 0$, d. h. $f(1) = 1$ oder $f(1) = -1$. Somit existieren genau zwei Lösungsfunktionen, nämlich $x \mapsto x$ und $x \mapsto -x$.
Durch Einsetzung in die gegebene Funktionalgleichung bestätigt man, dass diese beiden Funktionen die Funktionalgleichung erfüllen.

Aufgabe 16
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f\left(x + f(y)\right) = f\left(x - f(y)\right) + 4xf(y) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lösung
Man erkennt sofort, dass die durch $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion f die Funktionalgleichung erfüllt. Gesucht werde daher nach Lösungsfunktionen, die von der Nullfunktion verschieden sind.
Sei u so gewählt, dass $f(u) \neq 0$. Weiter sei $M = \{2f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{A}(x,y)$ bedeute $f\left(x + f(y)\right) = f\left(x - f(y)\right) + 4xf(y)$.
$\mathcal{A}(\frac{x}{8f(u)}, u)$ heißt dann, dass $x = 2f\left(\frac{x}{8f(u)} + f(u)\right) - 2f\left(\frac{x}{8f(u)} - f(u)\right)$.
Also kann irgendein $x \in \mathbb{R}$ geschrieben werden als $x = a - b$ mit $a, b \in M$.
Sei nun $g(x) = f(x) - x^2$ und $a = 2f(y) \in M$.
$\mathcal{A}(x + f(y), y)$ besagt, dass $f(x + a) = f(x) + 2ax + a^2$ und daher

$$g(x + a) = f(x + a) - (x + a)^2 = f(x) + 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $a \in M$, also auch $g(x - b) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $b \in M$ sowie schließlich $g(x + a - b) = g(x - b) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $a, b \in M$.

Da, wie schon festgestellt, jede reelle Zahl durch $a - b$ mit $a, b \in M$ geschrieben werden kann, erhält man $g(x+y) = g(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, also $g(x) = c$ mit einem beliebig gewählten $c \in \mathbb{R}$.
Damit sind insgesamt zwei Lösungen gefunden: $x \mapsto 0$ und $x \mapsto x^2 + c$ mit beliebig aber fest gewähltem $c \in \mathbb{R}$.
Einsetzung zeigt, dass beide Lösungen die Funktionalgleichung erfüllen.

Aufgabe 17
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung
$\mathcal{A}(x, y)$ bedeute: $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(xy)$; dann erhält man aus
$\mathcal{A}(0, 0)$: $f(0) = 0$;
$\mathcal{A}(2, 2)$: $f(2) = 0$;
$\mathcal{A}(1, 1)$: $f(2) = 3 \cdot f(1)$, also zusmammen mit voriger Zeile: $f(1) = 0$;
$\mathcal{A}(x, 1)$: $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; (*)
$\mathcal{A}(x, y+1)$ und (*): $2 \cdot f(x+y) = f(x) + 2 \cdot f(y) + f(xy+x)$. (**)
Subtrahiert man $2\mathcal{A}(x, y)$ von (**), so erhält man $f(xy+x) = f(x) + 2 \cdot f(xy)$. (***)
$\mathcal{A}(x, xy)$ bedeutet $f(x+xy) = f(x) + f(xy) + f(x^2y)$.
Subtrahiert man $\mathcal{A}(x, xy)$ von (***), so erhält man $f(xy) = f(x^2y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Für alle $x \neq 0$ impliziert dies $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x^2 \cdot \frac{1}{x})$, also $f(x) = f(1) = 0$, und außerdem hat man (s. o.) ja schon $f(0) = 0$, so dass sich insgesamt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergeben hat.
Man verifiziert umgekehrt sofort, dass die Nullfunktion ($x \mapsto 0$) die verlangte Eigenschaft besitzt.
Ergebnis: Die Nullfunktion ist die einzige Funktion mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 18
Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die folgende Bedingung erfüllt:

$$f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2 \quad \textit{für beliebige } m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Man ermittle alle Funktionen, die diese Bedingung erfüllen.

Lösung
Aus $f(0^2 + 0^2) = (f(0))^2 + (f(0))^2$ erhält man

$$f(0) = 2(f(0))^2 \;\Leftrightarrow\; f(0)\,(2f(0) - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(0) = 0 \;\vee\; f(0) = \frac{1}{2},$$

wobei der Fall $f(0) = \frac{1}{2}$ wegen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ausscheidet. Weiter ist dann

$$f(1) = f(1^2 + 0^2) = (f(1))^2 + (f(0))^2 = (f(1))^2,$$

so dass

$$(f(1))^2 - f(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(1)(f(1) - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(1) = 0 \;\vee\; f(1) = 1.$$

Zuerst werde jetzt der Fall $f(1) = 1$ betrachtet; man findet

$$\begin{aligned}
f(m^2) &= f(m^2 + 0^2) = (f(m))^2 + (f(0))^2 = (f(m))^2 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0;\\
f(2) &= f(1^2 + 1^2) = (f(1))^2 + (f(1))^2 = 2(f(1))^2 = 2;\\
f(4) &= f(2^2) = (f(2))^2 = 4;\\
f(5) &= f(2^2 + 1^2) = (f(2))^2 + (f(1))^2 = 4 + 1 = 5;\\
f(25) &= f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = (f(3))^2 + (f(4))^2 = (f(3))^2 + 16 = (f(5))^2 = 25,
\end{aligned}$$

und aus der letzten der voranstehenden Zeilen entnimmt man $(f(3))^2 = 25 - 16 = 9$, also $f(3) = 3$.
Damit kann man nun weitere Funktionswerte berechnen:

$$\begin{aligned}
f(8) &= f(2^2 + 2^2) = (f(2))^2 + (f(2))^2 = 8; \\
f(9) &= f(3^2) = (f(3))^2 = 9; \\
f(10) &= f(3^2 + 1^2) = (f(3))^2 + (f(1))^2 = 9 + 1 = 10; \\
f(13) &= f(3^2 + 2^2) = (f(3))^2 + (f(2))^2 = 9 + 4 = 13; \\
f(16) &= f(4^2) = (f(4))^2 = 16; \\
f(32) &= f(4^2 + 4^2) = (f(4))^2 + (f(4))^2 = 16 + 16 = 32; \\
f(64) &= f(8^2) = (f(8))^2 = 64; \\
f(100) &= f(10^2) = (f(10))^2 = 100.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis der letzten der vorstehenden Zeilen findet man aber auch durch Verdopplung des kleinsten pythagoräischen Zahlentripels:

$$f(100) = f(6^2 + 8^2) = (f(6))^2 + (f(8))^2 = (f(6))^2 + 64 = 100,$$

so dass $(f(6))^2 = 36$, also $f(6) = 6$ ist.
Legt man nun den zweiten möglichen Fall $f(1) = 0$ zugrunde, so erhält man als Ergebnis in den vorstehenden Rechnungen stets Null.
Als Zwischenergebnis können wir festhalten, dass zumindest $f(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0,\ k < 7$, oder $f(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0,\ k < 7$, gilt.
Zur Verallgemeinerung des bisherigen Vorgehens nehmen wir dieses Zwischenergebnis als Voraussetzung und nehmen außerdem an, dass zu der natürlichen Zahl m drei *kleinere* natürliche Zahlen n, r, s existieren, so dass

$$m^2 + n^2 = r^2 + s^2.$$

Wendet man die Funktion f auf die beiden Seiten vorstehender Gleichung an und benutzt außerdem die für f gegebene Funktionalgleichung, so liefert das

$$(f(m))^2 + (f(n))^2 = f(m^2 + n^2) = f(r^2 + s^2) = (f(r))^2 + (f(s))^2.$$

Wegen der Voraussetzung $f(k) = k$ bzw. $f(k) = 0$ für alle $k < m$ und der Annahme $n, r, s < m$ folgt überdies

$$(f(m))^2 + n^2 = r^2 + s^2$$

und deshalb $f(m) = m$ (im Fall $f(1) = 1$) bzw. $f(m) = 0$ (im Fall $f(1) = 0$). Daher brauchen wir nur noch zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl m, $m \geq 7$, tatsächlich kleinere natürliche Zahlen n, r, s existieren, die die Gleichung $m^2 + n^2 = r^2 + s^2$ erfüllen. Dazu ordnen wir diese Gleichung um in

$$m^2 - r^2 = s^2 - n^2.$$

Wählt man r mit der gleichen Parität wie m, so hat man folgende ganzzahlige Faktorisierung der beiden Seiten dieser Gleichung:

$$(2(m - r))\left(\frac{m + r}{2}\right) = (s - n)(s + n).$$

Durch Identifizierung der Faktoren auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man die beiden Bedingungen

$$2(m - r) = s - n, \qquad \frac{m + r}{2} = s + n.$$

Auflösung nach s bzw. n ergibt die natürlichen Zahlen

$$s = \frac{5m - 3r}{4}, \qquad n = \frac{5r - 3m}{4}.$$

Um diese Zahlen unter Wahrung von $r < m$ und gleicher Parität von r und m möglichst klein zu machen, setzen wir $r = m - 2$. Einsetzung in die Ausdrücke für s und n und dann Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung $m^2 + n^2 = r^2 + s^2$ liefert

$$m^2 + \left(\frac{m-5}{2}\right)^2 = (m-2)^2 + \left(\frac{m+3}{2}\right)^2.$$

Man beachte, dass für jede *ungerade* natürliche Zahl $m \geq 7$ die drei anderen Terme in dieser Gleichung streng kleiner als m sind. Für *gerade* Werte von $m \geq 7$ kann man die Gleichung mit 2^2 multiplizieren und dann $2m$ durch m bzw. m durch $\frac{m}{2}$ ersetzen; das liefert

$$m^2 + \left(\frac{m}{2} - 5\right)^2 = (m-4)^2 + \left(\frac{m}{2} + 3\right)^2.$$

Auch hier sind für jede gerade natürliche Zahl $m \geq 7$ die drei anderen Terme in dieser Gleichung streng kleiner als m.
Somit können wir unter Benutzung der beiden letzten Gleichungen zusammen mit der gegebenen Funktionalgleichung $f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$ den Induktionsschritt abschließen, haben also bewiesen, dass $f(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $f(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es gibt also genau zwei Lösungsfunktionen, nämlich

$$(x \mapsto 0)\,\big|\,\mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad (x \mapsto x)\,\big|\,\mathbb{N}_0,$$

die, wie man durch Probe sofort bestätigt, die gegebene Funktionalgleichung erfüllen.

Aufgabe 19
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, so dass $f(k + |f(m)|) = k + f(m)$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$ $(= \{1; 2; 3; \ldots\})$ gilt.

Lösung
Falls es ein $a \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f(a)| < a$, so ergibt sich für $(k; m) = (a - |f(a)|; a)$

$$f(a - |f(a)| + |f(a)|) = a - |f(a)| + f(a) \;\Rightarrow\; |f(a)| = a$$

im Widerspruch zu $|f(a)| < a$. Also gilt $|f(k)| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Falls es ein $a \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(a) < 0$, so ergibt sich für $(k; m) = (-f(a); a)$

$$f(-f(a) + |f(a)|) = -f(a) + f(a) \;\Rightarrow\; f(-2f(a)) = 0$$

und zusammen mit $f(k) \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erneut ein Widerspruch. Also gilt $f(k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aus dem bisher Gezeigtem resultiert $|f(k)| = f(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und als Problem stellt sich jetzt:
Man ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass $f(k + f(m)) = k + f(m)$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$.
Sei dann $z = \min(f(\mathbb{N}))$, und man erhält $f(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > z$.

Somit sind die Lösungsfunktionen folgendermaßen bestimmt:

Sei $a \in \mathbb{N}$,
$f(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq a$,
$f(k)$ kann jeden beliebigen Wert annehmen in $[a - 1; +\infty[$ für $k \in [1; a - 1]$.

Aufgabe 20
Man finde alle Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$f(y)+f(x+f(y))=y+f\left(f(x)+f(f(y))\right)$$

genügen.

Lösung
Setzt man $(x;y)=(f(x);0)$, erhält man $f(0)+f(f(x)+f(0))=f\left(f(f(x))+f(f(0))\right)$;
setzt man $(x;y)=(f(0);x)$, erhält man $f(x)+f(f(x)+f(0))=x+f\left(f(f(x))+f(f(0))\right)$.
Subtraktion liefert $f(x)-f(0)=x$, d. h.

$$f(x)=x+f(0) \text{ für alle } x\in\mathbb{R}, \text{ damit auch } f(y)=y+f(0) \text{ für alle } y\in\mathbb{R}.$$

Setzt man dies in die gegebene Funktionalgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} & (y+f(0))+(x+(y+f(0))+f(0)) &&= y+((x+f(0))+((y+f(0))+f(0)))+f(0)\\ \Leftrightarrow\quad & x+2y+3f(0) &&= x+2y+4f(0)\\ \Leftrightarrow\quad & f(0) &&= 0\end{aligned}$$

und somit als einzige Lösungsfunktion die durch $f(x)=x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gegebene Funktion f.
Die Probe liefert die gültige Gleichung $y+x+y=y+x+y$.

Aufgabe 21
Man finde alle Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$f\left(f(x)-y\right)=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy$$

genügen.

Lösung
f ist injektiv; denn sei $f(x_1)=f(x_2)$; dann hat man

$$(x;y)=(x_1;y)\quad\Rightarrow\quad f(f(x_1)-y)=f(x_1)-f(y)+f(x_1)f(y)-x_1y$$

$$(x;y)=(x_2;y)\quad\Rightarrow\quad f(f(x_2)-y)=f(x_2)-f(y)+f(x_2)f(y)-x_2y$$

Durch Subtraktion folgt $(x_1-x_2)y=0$, und da diese Gleichung für beliebige $y\in\mathbb{R}$ gelten muss, bleibt nur $x_1=x_2$. Damit ist die Injektivität von f gezeigt.

Sei $a=f(0)$. Man findet

$$\begin{aligned}(x;y)=(0;0)\quad\Rightarrow\quad & f(f(0)-0) &&= f(0)-f(0)+f(0)f(0)-0\\ \Rightarrow\quad & f(a) &&= a-a+a^2\\ \Rightarrow\quad & f(a) &&= a^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x;y)=(0;a)\quad\Rightarrow\quad & f(f(0)-a) &&= f(0)-f(a)+f(0)f(a)-0\\ \Rightarrow\quad & a &&= a-f(a)+af(a)\\ \Rightarrow\quad & 0 &&= (a-1)f(a)\\ \Rightarrow\quad & 0 &&= (a-1)a^2\\ \Rightarrow\quad & a=0 \;\;\vee\;\; a=1 &&\end{aligned}$$

Also ist $a \in \{0; 1\}$.
Falls $a = 0$, damit auch $f(0) = 0$, so hat man unter Benutzung der Injektivität von f

$$\begin{aligned}(x; y) = (x; 0) \;\Rightarrow\;\; & f(f(x) - 0) = f(x) - f(0) + f(x)f(0) - 0 \\ \Rightarrow\;\; & f(f(x)) \qquad = f(x) \\ \Rightarrow\;\; & f(x) \qquad\quad = x,\end{aligned}$$

und die durch $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion f ist tatsächlich eine Lösungsfunktion, wie man sofort durch Probe feststellt.
Falls $a = 1$, damit auch $f(0) = 1$, so hat man

$$\begin{aligned}(x; y) = (0; 0) \;\Rightarrow\;\; & f(f(0) - 0) = f(0) - f(0) + f(0)f(0) - 0 \\ \Rightarrow\;\; & f(1) \qquad\quad = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x; y) = (1; 1) \;\Rightarrow\;\; & f(f(10) - 1) = f(1) - f(1) + f(1)f(1) - 1 \\ \Rightarrow\;\; & f(0) \qquad\qquad = 1 - 1 + 1 - 1 \\ \Rightarrow\;\; & 1 \qquad\qquad\quad = 0,\end{aligned}$$

ein Widerspruch! Also kann der Fall $a = 1$ nicht eintreten.
Somit ist die zuvor genannte Funktion f die einzige Lösungsfunktion.

Aufgabe 22
Man finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$f\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right) = f(a^2) + f(b^2).$$

Lösung
Es bedeute $P(x, y)$ die Behauptung: $f\left(\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}\right) = f(x^2) + f(y^2)$ für $x, y \neq 0$.
Seien a, b zwei verschiedene positive reelle Zahlen, und man betrachte das System

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= 3a \\ x^2 - xy + y^2 &= 3b.\end{aligned}$$

(Man beachte, dass $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy > 0$ für alle positiven reellen x, y.)
Subtraktion liefert $xy = \frac{3}{2}(a - b)$, und damit kann man das Gleichungssystem umformen in

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy + y^2 &= 3a + \frac{3}{2}(a - b) \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 3b - \frac{3}{2}(a - b),\end{aligned} \quad \text{und dieses System ist äquivalent mit} \quad \begin{aligned}(x + y)^2 &= \frac{3}{2}(3a - b) \\ (x - y)^2 &= \frac{3}{2}(3b - a).\end{aligned}$$

Dieses (rechte) System besitzt Lösungen in positiven reellen Zahlen x, y, sofern $0 < \frac{a}{3} \leq b \leq 3a$ und $a \neq b$.

Vergleicht man jetzt $P(x, y)$ und $P(x, -y)$ mit den Lösungen dieses Systems, erhält man $f(a) = f(b)$. Also ist f über einem beliebigen Intervall $]u; 9u] \subset \mathbb{R}^+$ und somit über $\mathbb{R}^+$ konstant. Folglich ist die einzige Lösung $\boxed{f(x) = 0 \text{ für alle } x > 0.}$

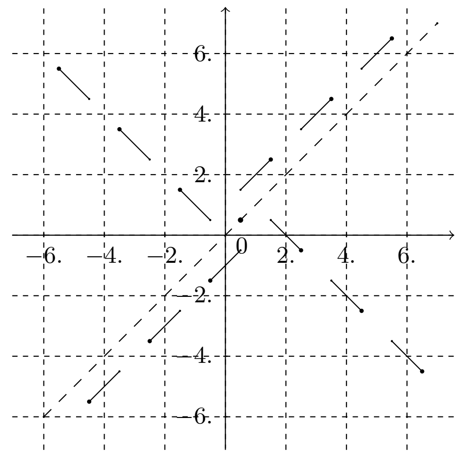
Aufgabe 23 (BWM 2018-2-2)
Wir betrachten alle reellen Funktionen f mit der Eigenschaft $f(1-f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
a) Weise die Existenz einer solchen Funktion durch Angabe eines konkreten Beispiels nach.
b) Wir definieren für jede solche Funktion f die Summe

$$S_f = f(-2017) + f(-2016) + \ldots + f(-1) + f(0) + f(1) + \ldots + f(2017) + f(2018).$$

Bestimme die Menge aller Werte, die derartige Summen S_f annehmen können.
Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

1. Lösung (von Hannah Boß, 17jährige Schülerin, Greven)
a) Die reelle Funktion f_0 sei gegeben durch

$$f_0(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x < \frac{1}{2} \text{ und } \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \text{ gerade,} \\ -x, & \text{falls } x < \frac{1}{2} \text{ und } \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = \frac{1}{2}, \\ -x+2, & \text{falls } x > \frac{1}{2} \text{ und } \lceil x - \frac{1}{2} \rceil \text{ gerade,} \\ x+1, & \text{falls } x > \frac{1}{2} \text{ und } \lceil x - \frac{1}{2} \rceil \text{ ungerade.} \end{cases}$$



Offensichtlich ist f_0 wohldefiniert, da jeder reellen Zahl eindeutig eine der fünf Fallunterscheidungen zugeordnet werden kann. f_0 erfüllt die Funktionalgleichung $f_0(1-f_0(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wie jetzt gezeigt wird.

1. Fall: $x < \frac{1}{2}$ und $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ gerade.
Dann ist $f_0(x) = x - 1$ und folglich $f_0(1 - f_0(x)) = f(1 - (x-1)) = f_0(-x+2)$.
Wegen $x < \frac{1}{2}$ ist $-x + 2 > -\frac{1}{2} + 2 > \frac{1}{2}$.
Da jetzt $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ gerade ist, ist der Spiegelpunkt dieser Zahl bei Punktspiegelung der Zahlengeraden bzgl. der Null $\lceil -x - \frac{1}{2} \rceil$, und daher ist auch $\lceil -x + \frac{3}{2} \rceil = \lceil (-x+2) - \frac{1}{2} \rceil$ gerade.
Somit gilt jetzt $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(-x+2) = -(-x+2) + 2 = x$.

2. Fall: $x < \frac{1}{2}$ und $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ ungerade.
Dann ist $f_0(x) = -x$ und $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(x+1)$.
Da $x < \frac{1}{2}$ und $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ ungerade sein soll, muss $x < -\frac{1}{2}$ und damit $x+1 < \frac{1}{2}$ sein; denn für alle x mit $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$ gilt $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 0$.
Weil nun $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ ungerade, so ist $\lfloor (x+1) + \frac{1}{2} \rfloor$ gerade und folglich $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(x+1) = (x+1) - 1 = x$.

3. Fall: $x = \frac{1}{2}$.
Hier gilt $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(1 - \frac{1}{2}) = f_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = x$.

4. Fall: $x > \frac{1}{2}$ und $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ gerade.
Dann ist $f_0(x) = -x + 2$ und $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(x-1)$.
Da $x > \frac{1}{2}$ und $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ gerade sein soll, so muss $x > \frac{3}{2}$ und $x - 1 > \frac{1}{2}$ sein.
Weil nun $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ gerade, ist $\lceil (x-1) - \frac{1}{2} \rceil$ ungerade und somit $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(x-1) = (x-1) + 1 = x$.

5. Fall: $x > \frac{1}{2}$ und $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ ungerade.
Dann ist $f_0(x) = x + 1$ und $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(-x)$.
Aus $x > \frac{1}{2}$ folgt $-x < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, und weil $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ ungerade, so ist auch $\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor$ ungerade.
Somit gilt auch jetzt wieder $f_0(1 - f_0(x)) = f_0(-x) = -(-x) = x$.

b) Nun werde eine beliebige Funktion f betrachtet, die die Funktionalgleichung $f(1-f(x))=x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllt. Substitution von x durch $1-f(x)$ liefert

$$\begin{aligned} & f\left(1-f(1-f(x))\right) = 1-f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(1-x) = 1-f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(1-x)+f(x) = 1 \end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann ist

$$S_f=\sum_{i=-2017}^{2018} f(i)=\sum_{i=-2017}^{0} f(i)+\sum_{i=1}^{2018} f(i)=\sum_{i=1}^{2018}\left(f(1-i)+f(i)\right)=\sum_{i=1}^{2018} 1=2018.$$

Also ist $\{2018\}$ die Menge aller möglichen Werte, die S_f für beliebige Funktionen der geforderten Art liefern kann.

2. Lösung mit komplexen Zahlen

a) Die Eigenschaft $f(1-f(x))=x$ besagt, dass $\overset{-1}{f}(x)=1-f(x)$ ist. Da sich Funktion und Umkehrfunktion nur um eine Konstante unterscheiden, werde folgender linearer Ansatz gemacht: $f(x)=ax+b$ mit $a\neq 0$; dann ist

$$f(1-f(x))=f(1-ax-b)=a(1-ax-b)+b=-a^2x+(a+b-ab).$$

Damit der letzte Term gleich x wird, muss $-a^2=1$ und $a+b-ab=0$ sein; das liefert $a=i$ und

$$b=\frac{i}{i-1}=\frac{i(i+1)}{i^2-1}=\frac{i^2+i}{-2}=\frac{i-1}{-2}=\frac{1-i}{2},$$

sodass also $f(x)=ix+\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}+(x-\frac{1}{2})i$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Tatsächlich hat man jetzt für alle $x\in\mathbb{R}$

$$f(1-f(x))=f\big(1-(\frac{1}{2}+(x-\frac{1}{2})i)\big)=f\big(\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})i\big)=\frac{1}{2}+\left(\left(\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})i\right)-\frac{1}{2}\right)i=\frac{1}{2}+\big(x-\frac{1}{2}\big)=x.$$

Bemerkung. Die Funktion f ist für alle $x\in\mathbb{R}$ definiert; ihre Wertemenge $\mathcal{W}_f=\big\{w\,|\,w=\frac{1}{2}+(x-\frac{1}{2})i\wedge x\in\mathbb{R}\big\}$ liegt dagegen in $\mathbb{C}$; in der gaußschen Zahlenebene wird sie dargestellt durch diejenige Parallele zur imaginären Achse, die die reelle Achse an der Stelle $\frac{1}{2}$ schneidet. f bildet also eine Gerade (die x-Achse) wieder auf eine Gerade (die genannte Parallele) ab, und zwar umkehrbar eindeutig. Die Umkehrfunktion von f wird auch gegeben durch $\big(\Im(w)$ bezeichne den Imaginärteil von $w\big)$

$$\overset{-1}{f}(w)=\frac{1}{2}-\Im(w)i=\frac{1}{2}-\big(x-\frac{1}{2}\big)i=1-\left(\frac{1}{2}+\big(x-\frac{1}{2}\big)i\right)=1-f(x)\quad\text{für alle } w\in\mathcal{W}_f.$$

b) Mit der in a) gebildeten Funktion f findet man

$$\begin{aligned} S_f &= (-2017i+\frac{1-i}{2})+(-2016i+\frac{1-i}{2})+\ldots+(-i+\frac{1-i}{2})+(\frac{1-i}{2}) \\ &\quad +(i+\frac{1-i}{2})+\ldots+(2017i+\frac{1-i}{2})+(2018i+\frac{1-i}{2}) \\ &= 4034\cdot\frac{1-i}{2}+\frac{1-i}{2}+(2018\cdot i+\frac{1-i}{2}) \\ &= 2017(1-i)+(1-i)+2018i \\ &= 2018(1-i)+2018i \\ &= 2018. \end{aligned}$$

Nun sei f irgendeine Funktion, welche die gegebene Funktionalgleichung erfüllt. Dann stellt man fest:
1.) f ist surjektiv, da $f(1-f(x))$ alle Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen kann;
2.) f ist injektiv; denn sei $f(a)=f(b)$ für beliebige $a,b\in\mathbb{R}$; dann gilt

$$f(1-f(a)) = f(1-f(b)) \;\Rightarrow\; a=b.$$

Damit ist jede die Funktionalgleichung erfüllende Funktion f bijektiv.

Substitution von x durch $1-f(x)$ liefert

$$\begin{aligned} & f\left(1-f(1-f(x))\right) &&= 1-f(x)\\ \Leftrightarrow\;& f(1-x) &&= 1-f(x)\\ \Leftrightarrow\;& f(1-x)+f(x) &&= 1 \end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann ist

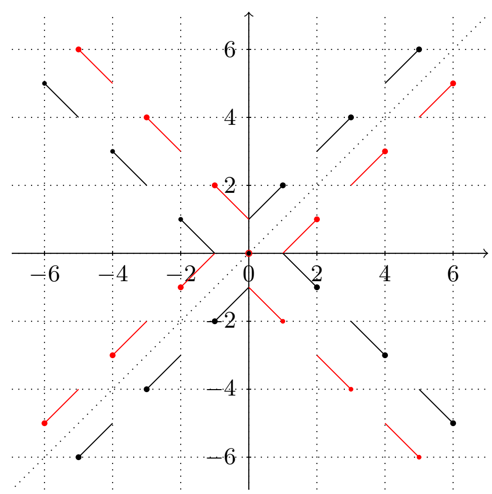
$$S_f = \sum_{i=-2017}^{2018} f(i) = \sum_{i=-2017}^{0} f(i) + \sum_{i=1}^{2018} f(i) = \sum_{i=1}^{2018} \left(f(1-i)+f(i)\right) = \sum_{i=1}^{2018} 1 = 2018.$$

Also ist $\{2018\}$ die Menge aller möglichen Werte, die S_f für beliebige Funktionen der geforderten Art liefern kann.

Aufgabe 24 *Man finde eine reelle Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so, dass $f\big(f(x)\big)=-x$ ist.*

Lösung
$f\big(f(x)\big) = -x$ ist äquivalent mit $-f\big(f(x)\big) = x$, und das bedeutet, dass $\overset{-1}{f} = -f$ sein muss. Sei f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{falls } x<0 \text{ und } \lfloor x\rfloor \text{ gerade},\\ x-1, & \text{falls } x<0 \text{ und } \lfloor x\rfloor \text{ ungerade},\\ 0, & \text{falls } x=0,\\ -x+1, & \text{falls } x>0 \text{ und } \lceil x\rceil \text{ gerade},\\ x+1, & \text{falls } x>0 \text{ und } \lceil x\rceil \text{ ungerade}. \end{cases}$$



Eine solche „Windmühlenflügel-Funktion“ (abgek.: WMF-Funktion) wird betrachtet in dem Artikel „$f(f(x)) = -x$, Windmills, and Beyond“ von Martin Griffiths (Mathematics Magazine Vol. 83, No. 1, February 2010, pp. 15-23).

Z. B. ist $f(\frac12)=\frac32,\ f(\frac32)=-\frac12,\ f(-\frac12)=-\frac32,\ f(-\frac32)=\frac12$, sodass $f(f(\frac12))=-\frac12$ und $f\circ f\circ f\circ f(\frac12)=\frac12$;

außerdem ist $f\circ f\circ f(\frac12) = -\frac32 = -f(\frac12)$, d. h. $\overset{-1}{f}(\frac12) = f\circ f\circ f(\frac12)$.

Der Graph der Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden. Dadurch findet man sofort (siehe roter Graph in obiger Figur)

$$\overset{-1}{f}(x) = \overset{3}{f}(x) = f\circ f\circ f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x<0 \text{ und } \lfloor x\rfloor \text{ gerade},\\ -x+1, & \text{falls } x<0 \text{ und } \lfloor x\rfloor \text{ ungerade},\\ 0, & \text{falls } x=0,\\ x-1, & \text{falls } x>0 \text{ und } \lceil x\rceil \text{ gerade},\\ -x-1, & \text{falls } x>0 \text{ und } \lceil x\rceil \text{ ungerade}. \end{cases}.$$

Der Nachweis, dass $f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = x$ und dann auch $\overset{-1}{f}\big(f(x)\big) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wird durch nachfolgende Fallunterscheidungen erbracht. Nach der Eingangsfeststellung ist hiermit dann auch $f\big(f(x)\big) = -x$ bewiesen.

Fall 1: Sei $x < 0$ und $\lfloor x \rfloor$ gerade. Dann ist $\lfloor x+1 \rfloor$ ungerade, sodass $f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$.
Fall 2: Sei $x < 0$ und $\lfloor x \rfloor$ ungerade. Dann ist $\lceil -x-1 \rceil$ gerade und positiv, sodass

$$f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = f(-x+1) = -(-x+1) + 1 = x.$$

Fall 3: Sei $x = 0$. Dann ist $f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = f(0) = 0 = x$.

Fall 4: Sei $x > 0$ und $\lceil x \rceil$ gerade. Dann ist $\lfloor x-1 \rfloor$ ungerade, sodass $f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = f(f(x-1) = (x+1) - 1 = x$.
Fall 5: Sei $x > 0$ und $\lceil x \rceil$ ungerade. Dann ist $\lfloor -x-1 \rfloor$ gerade und negativ, sodass

$$f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = f(-x-1) = -(-x-1) - 1 = x.$$

f ist also eine Bijektion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, und sie erfüllt f die Bedingung $f\big(f(x)\big) = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.