Fortsetzung von Anfangsstücken einer Zahlenfolge

Gegeben: Folgenanfangsstück 2; 4; 9; 20; 40.
Gesucht: Mögliche Fortsetzungen.

1.) Die Zahlen könnten die erste Periode einer *periodischen* Zahlenfolbge sein; dann wäre die nach 40 nächstfolgende Zahl die Zahl 2.

2.) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_k = \frac{1}{2}k\big(k(k-3)+6\big)$ liefert
$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 9; a_4 = 20; a_5 = 40; a_6 = 72; a_7 = 119.$

3.) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_k = \frac{1}{30}(2k^5 - 30k^4 + 185k^3 - 495k^2 + 638k - 240)$ liefert
$b_1 = 2; b_2 = 4; b_3 = 9; b_4 = 20; b_5 = 40; b_6 = 80; b_7 = 167,$
(wie man leicht mittels HORNERschemas finden kann).

4.) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $\frac{1}{4}(3k^4 - 28k^3 + 105k^2 - 144k + 80)$ liefert zunächst nur
$c_1 = 4; c_2 = 9; c_3 = 20; c_4 = 40; c_5 = 90; c_6 = 209; c_7 = 454.$
Mit dieser Folge kann eine weitere Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert werden durch $d_1 = 2; d_{k+1} = c_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist
$d_1 = 2; d_2 = 4; d_3 = 9; d_4 = 20; d_5 = 40; d_6 = 90; d_7 = 209; d_8 = 454.$

Die unter 3.) und 4.) angegebenen Folgenterme sowie noch viele weitere können mittels des NEWTON*schen Interpolationspolynoms* gefunden werden. Insgesamt ist damit gezeigt:

Durch ein endliches Anfangsstück wird eine Zahlenfolge nicht eindeutig festgelegt.

Wenn eine *eindeutige* Fortsetzung gefunden werden soll, muss neben dem Anfangsstück der Zahlenfolge noch wenigstens eine (evtl. verbal formulierte) Zusatzbedingung gestellt werden.

5.) Es werde eine Folge gebildet durch das (endliche) Anfangsstück

$$3 \overset{\cdot 1}{\curvearrowright} 3 \overset{-1}{\curvearrowright} 2 \overset{\cdot 2}{\curvearrowright} 4 \overset{-2}{\curvearrowright} 2 \overset{\cdot 3}{\curvearrowright} 6 \overset{-3}{\curvearrowright} 3 \overset{\cdot 4}{\curvearrowright} 12 \overset{-4}{\curvearrowright} 8 \overset{\cdot 5}{\curvearrowright} 40 \overset{-5}{\curvearrowright} 35 \overset{\cdot 6}{\curvearrowright} 210 \overset{-6}{\curvearrowright} 204.$$

Hieraus werde das Anfangsstück

$$3; 2; 2; 3; 8; 35; 204$$

als Teilfolge entnommen; diese wird rekursiv geliefert durch

$$a_1 = 3;\ a_{n+1} = n(a_n - 1) \quad \text{für } n \ge 1$$

oder auch durch

$$a_0 = 3;\ a_n = \lceil n! \cdot (3 - \mathrm{e}) + 1 \rceil \quad \text{für } n \ge 1 \text{ und mit } \mathrm{e} = \exp(1).$$

Durch Umindizierung erhält man die Darstellung

$$a_1 = 3;\ a_{n+1} = \lceil n! \cdot (3 - \mathrm{e}) + 1 \rceil \quad \text{für } n \ge 1.$$

Dabei ist $\lceil . \rceil$ die Ceiling-Funktion, die zu jedem $x \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl oberhalb von x liefert (z.B. $\lceil 2,43 \rceil = 3$; $\lceil -2,43 \rceil = -2$; $\lceil 4 \rceil = 4$; $\lceil -4 \rceil = -4$).

Auch hier lassen sich aber noch beliebig viele Terme bilden, durch die das betrachtete Anfangsstück geliefert wird.

6.) Hier noch ein weiteres Beispiel. Gegeben sei das Folgenanfangsstück $3; 12; -24; -15; 30$. Falls man entdeckt, dass die Zahlen der Reihe nach durch folgendes Vorgehen gebildet sein könnten:

$$3 \overset{+9}{\curvearrowright} 12 \overset{\cdot(-2)}{\curvearrowright} -24 \overset{+9}{\curvearrowright} -15 \overset{\cdot(-2)}{\curvearrowright} 30 \overset{+9}{\curvearrowright} \text{ usw.},$$

so wird man als nächstfolgende Zahl 39 finden.
Es sind aber auch ganz andere nächstfolgende Zahlen möglich; denn der Term – den man mittels des NEWTON*schen Interpolationpolynoms* und einigem Rechenaufwand herstellen kann –

$$a_n = -\frac{1}{8}(33n^4 - 450n^3 + 2055n^2 - 3582n + 1920)$$

liefert für $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ das betrachtete Folgenanfangsstück; jedoch ist, wie man mittels HORNERschemas unter Mitbenutzung eines Taschenrechners schnell ausrechnen kann, $a_6 = 3$ und nicht 39.
Soll 39 als nächstfolgende Zahl gefunden werden, so genügt keinesfalls die Angabe: „Setze logisch fort“.
Es muss in jedem Fall noch eine Zusatzbedingung formuliert werden!

7.) Die durch $a_n = 3 \cdot 2^n$ und $b_n = n \cdot (n^2 - 3n + 8)$ $\Big(= n\big((n-3)n + 8\big)\Big)$ gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefern für $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ die gleichen Zahlen:
$a_1 = b_1 = 6;\ a_2 = b_2 = 12;\ a_3 = b_3 = 24;\ a_4 = b_4 = 48;$ aber $a_5 = 96;\ b_5 = 90.$

Bei dieser Gelegenheit noch ein Tipp, wie man geschickt $\sum_{i=1}^{n} i!$ berechnen kann, beispielsweise konkret:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} i! &= 1! + 2! + \cdots + 6! = 1 + 1\cdot 2 + \cdots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\\ &= 1 + 2(1 + 3(1 + 4(1 + 5(1 + 6)))) = 873.\end{aligned}$$

Mit der Berechnung beginnt man mit der innersten Klammer.

8.) Ein weiteres Beispiel sei das Anfangsstück $3; 6; 17; 66$. Wie könnte die nächste Zahl lauten?
Die vorgelegten Zahlen werden für $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ rekursiv geliefert durch

$$a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = (n+1)(a_n - 1) + 2 \ \big(= (n+1)a_n - (n-1)\big)$$

und explizit durch

$$b_n = -\frac{1}{12}(31n^4 - 370n^3 + 1397n^2 - 2102n + 1008)$$

sowie auch durch

$$c_n = \lfloor n! \cdot \mathrm{e} \rfloor + 1.$$

Hier ist $\lfloor . \rfloor$ die Floor-Funktion, die zu jedem $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl unterhalb von$x$ liefert (gleich der früher benutzten Gaußklammer).
Es ist $a_5 = 327,\ a_6 = 1958;\ \ b_5 = 121, b_6 = 88;\ \ c_5 = 327, c_6 = 1958.$
Auch hier gilt wie zuvor, dass noch beliebige andere Fortsetzungen dieses Anfangsstückes möglich sind.

9.) Als noch ein weiteres Beispiel sei das Anfangsstück $1; 5; 15; 35; 70; 126; 210$ vorgelegt. Ein Term, der diese Zahlen der Reihe nach liefert, kann wie folgt gefunden werden.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	5	15	35	70	126	210
1. Diff.-Folge		4	10	20	35	56	84
2. Diff.-Folge		6	10	15	21	28	36
3. Diff.-Folge			4	5	6	7	8
4. Diff.-Folge			1	1	1	1	1

Es handelt sich hier um das Anfangsstück einer *arithmetischen Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *4. Ordnung*, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
a_n &= 1\cdot\binom{n-1}{0} + 4\cdot\binom{n-1}{1} + 6\cdot\binom{n-1}{2} + 4\cdot\binom{n-1}{3} + 1\cdot\binom{n-1}{4}\\
&= 1 + \frac{4}{1!}(n-1) + \frac{6}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{4}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\\
&= 1 + 4(n-1) + 3(n^2-3n+2) + \frac{2}{3}(n^3-6n^2+11n-6) + \frac{1}{24}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)\\
&= \ldots..\\
&= \frac{1}{24}(n^4+6n^3+11n^2+6n)\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left(= \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\right)
\end{aligned}$$

Als achtes Folgeglied würde man jetzt $a_8 = 330$ erhalten (was man schon aus obiger Tabelle folgern kann).

Erwähnenswert ist noch, dass die erste Differenzfolge $4, 10; 20; 35; 56; 84$ der Reihe nach die *Teilsummen der Tetraederzahlen* liefert:

$$\begin{aligned}
1+3 &= 4\\
1+3+6 &= 10\\
1+3+6+10 &= 20\\
1+3+6+10+15 &= 35\\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Außerdem fällt eine gewisse Nähe der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zum PASCAL-Dreieck auf.

Zahldarstellung:

$n=0$:					1				
$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1
Platz:	0		1		2		3		4
					↑				
					dritte (!) Stelle				

Darstellung mittels Binomialkoeffizienten:

$n=0$:					$\binom{0}{0}$				
$n=1$:				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$			
$n=2$:			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		
$n=3$:		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$	
$n=4$:	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$
Platz:	0		1		2		3		4