Lösung einiger Exponentialgleichungen

Aufgabe 1: Man löse die Gleichung $3^x - (\sqrt{3})^{x+4} + 20 = 0$ und berechne die Summe der Lösungen.

Lösung 1
Da $3 = \sqrt{3}^{\,2}$ ist, kann man beide Potenzen auf gleiche Basis bringen.

$$\begin{aligned}
3^x - (\sqrt{3})^{x+4} + 20 &= 0 \\
\big((\sqrt{3})^x\big)^2 - (\sqrt{3})^x \cdot 9 + 20 &= 0 \\
\big((\sqrt{3})^x - 4\big)\big((\sqrt{3})^x - 5\big) &= 0 \quad \text{(nach dem Satz des VIETA)} \\
\log_3((\sqrt{3})^x) = \log_3(4) \;&\vee\; \log_3((\sqrt{3})^x) = \log_3(5) \\
x \cdot \log_3(\sqrt{3}) = \log_3(4) \;&\vee\; x \cdot \log_3(\sqrt{3}) = \log_3(5) \quad \Big|\ \log_3(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\
x = 2 \cdot \log_3(4) \;&\vee\; x = 2 \cdot \log_3(5)
\end{aligned}$$

Die nummerische Auswertung ergibt $x = 2 \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 2,5237$ oder $x = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 2,9299$.

Die Summe der Lösungen ist $2 \cdot \log_3(4) + 2 \cdot \log_3(5) = 2 \cdot \big(\log_3(4) + \log_3(5)\big) = 2 \cdot \log_3(20) \approx 5,4537$.

Aufgabe 2: Man löse die Gleichung $3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} = 2^{2x-4}$.

Lösung 2
Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen.

Erste Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 2^{2x-4} \qquad \Big|\ : 4^{x-3} \\
3 + \frac{5 \cdot 7^{x-3}}{4^{x-3}} &= \frac{(2^2)^{x-2}}{4^{x-3}} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= \frac{4^{x-2}}{4^{x-3}} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= 4^{x-2-(x-3)} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= 4 \\
\left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= \frac{1}{5} \\
(x-3)\ln\left(\frac{7}{4}\right) &= \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\
x - 3 &= \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} \\
x &= \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} + 3
\end{aligned}$$

Zweite Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 2^{2x-4} \\
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 4^{x-2} \\
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 4 \cdot 4^{x-3} \\
5 \cdot 7^{x-3} &= 4^{x-3} \\
\frac{5 \cdot 7^x}{7^3} &= \frac{4^x}{4^3} \\
5 \cdot 4^3 \cdot 7^x &= 7^3 \cdot 4^x \\
\ln(5 \cdot 4^3) + x \cdot \ln(7) &= \ln(7^3) + x \cdot \ln(4) \\
x \cdot \big(\ln(7) - \ln(4)\big) &= \ln(7^3) - \ln(5 \cdot 4^3) \\
x &= \frac{\ln(343) - \ln(320)}{\ln(7) - \ln(4)} \\
x &= \frac{\ln(\frac{343}{320})}{\ln(\frac{7}{4})}
\end{aligned}$$

Nach beiden Möglichkeiten ergibt die nummerische Auswertung $x \approx 0,12403$.

Als kleines Nebenergebnis hat man hiermit auch noch gezeigt, dass $3 + \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} = \frac{\ln(343)-\ln(320)}{\ln(7)-\ln(4)}$ ist.

Aufgabe 3
Man löse die Gleichung $8^{2x-1} + 8^{2x+1} = 3^{3x-2} + 3^{3x+2}$.

Lösung 3

$$\begin{aligned}
8^{2x-1} + 8^{2x+1} &= 3^{3x-2} + 3^{3x+2} \\
8^{2x} \cdot 8^{-1} + 8^{2x} \cdot 8^{1} &= 3^{3x} \cdot 3^{-2} + 3^{3x} \cdot 3^{2} \\
8^{2x} \cdot (\frac{1}{8} + 8) &= 3^{3x} \cdot (\frac{1}{9} + 9) \\
\frac{8^{2x}}{3^{3x}} &= \frac{\frac{1}{9} + 9}{\frac{1}{8} + 8} \\
\left(\frac{64}{27}\right)^{x} &= \frac{82 \cdot 8}{65 \cdot 9} \\
x \cdot \ln\left(\frac{64}{27}\right) &= \ln\left(\frac{656}{585}\right) \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{656}{585}\right)}{\ln\left(\frac{64}{27}\right)} \\
x &\approx 0,1327
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Man löse die Gleichung $4^{x-1} - 9^{x} = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$.

Lösung 4

$$\begin{aligned}
4^{x-1} - 9^{x} &= 3^{2x-1} - 2^{2x+1} \\
4^{x-1} + 2^{2x+1} &= 3^{2x-1} + 9^{x} \\
2^{2x-2} + 2^{2x+1} &= 3^{2x-1} + 3^{2x} \\
2^{2x} \cdot (\frac{1}{4} + 2) &= 3^{2x} \cdot (\frac{1}{3} + 1) \\
\left(\frac{4}{9}\right)^{x} &= \frac{16}{27} \\
x \cdot \ln\left(\frac{4}{9}\right) &= \ln\left(\frac{16}{27}\right) \\
x &= \frac{\ln(\frac{16}{27})}{\ln(\frac{4}{9})} \\
x &\approx 0,6452
\end{aligned}$$

Aufgabe 5
Welche $x \in \mathbb{R}^{+}$ erfüllen die Gleichung $\dfrac{2^{(9^x)}}{8^{(3^x)}} = \dfrac{1}{4}$?

Lösung 5

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{(9^x)}}{8^{(3^x)}} &= \frac{1}{4} \\
\frac{2^{(3^{2x})}}{2^{(3\cdot 3^x)}} &= 2^{-2} \\
2^{3^{2x}-3\cdot 3^x} &= 2^{-2} \\
3^{2x} - 3\cdot 3^x &= -2 \\
(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Die Substitution $z = 3^x$ liefert

$$
\begin{aligned}
z^2 - 3z + 2 &= 0 \\
(z-1)(z-2) &= 0 \\
z = 1 &\vee z = 2
\end{aligned}
$$

Resubstitution ergibt

$$
\begin{aligned}
3^x = 1 &\vee 3^x = 2 \\
x = 0 &\vee x = \log_3(2).
\end{aligned}
$$

Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ kommt nur $x = \log_3(2)$ als Lösung in Betracht.