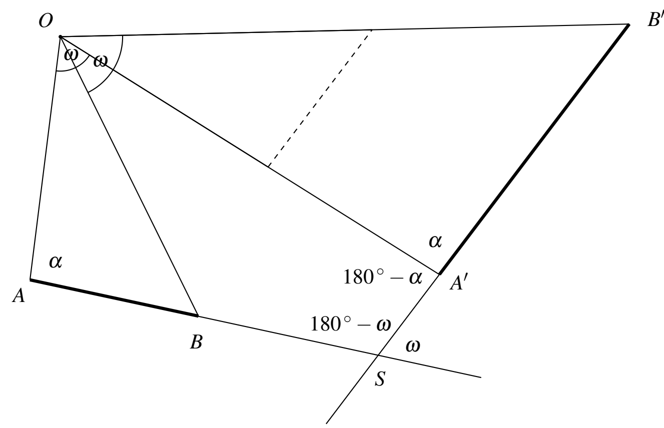
Drehstreckung

Definition
Als **Drehstreckung** bezeichnet man eine Ähnlichkeitstransformation mit genau einem Fixpunkt, dem Drehpunkt, aber ohne Fixgerade. Sie stellt eine Verkettung von Drehung und zentrischer Streckung dar.

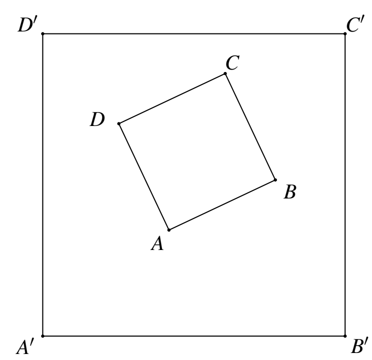
Sind Drehpunkt und Streckfaktor bekannt, ist es nicht schwierig, mit Zirkel und Lineal zu einer vorgegeben Strecke die Bildstrecke zu konstruieren.
Wie aber findet man bei vorgegebener Urbild- und Bildstrecke den Drehpunkt der Drehstreckung? Dazu ist folgende Vorüberlegung hilfreich. Anschließend folgt dann eine Anwendungsaufgabe.

In nebenstehender Figur sind die Dreiecke $\triangle ABO$ und $\triangle A'B'O$ ähnlich. Daher ist $|\angle BAO| = |\angle B'A'O'| = \alpha$ und $|\angle OA'S| = 180^\circ - \alpha$.
Weiter gilt $|\angle AOA'| = |\angle BOB'| = \omega$ und $|\angle A'SA| = 180^\circ - \omega$.
Das Viereck $ASA'O$ ist also Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks $\triangle ASA'$, und analog ist das Viereck $BSB'O$ Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks $\triangle BSB'$, da die Weiten gegenüberliegender Winkel sich jeweils zu 180° ergänzen.
Das bedeutet insbesondere, dass die Umkreise der Dreiecke $\triangle ASA'$ und $\triangle BSB'$ sich sowohl in S als auch in O schneiden. Hieraus ist jetzt zu entnehmen, wie man den Drehpunkt einer Drehstreckung konstruktiv finden kann, wenn nur Urbild- und Bildstrecke vorgegeben sind.



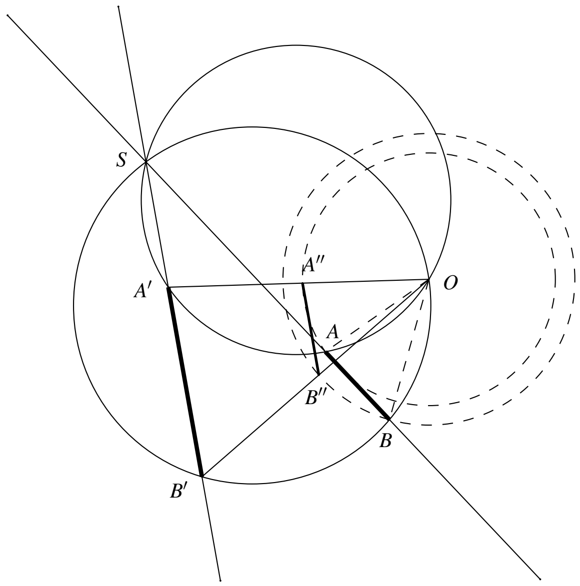
In dem Buch „Kaleidoskop – Ein mathematischer Almanach“ von EBERHARD OETTINGER (Ernst Klett Verlag Stuttgart 1988, ISBN 3-12-722010-3) steht auf Seite 102 unter Nummer 17 folgende Aufgabe aus der USA-Mathematikolympiade 1979:

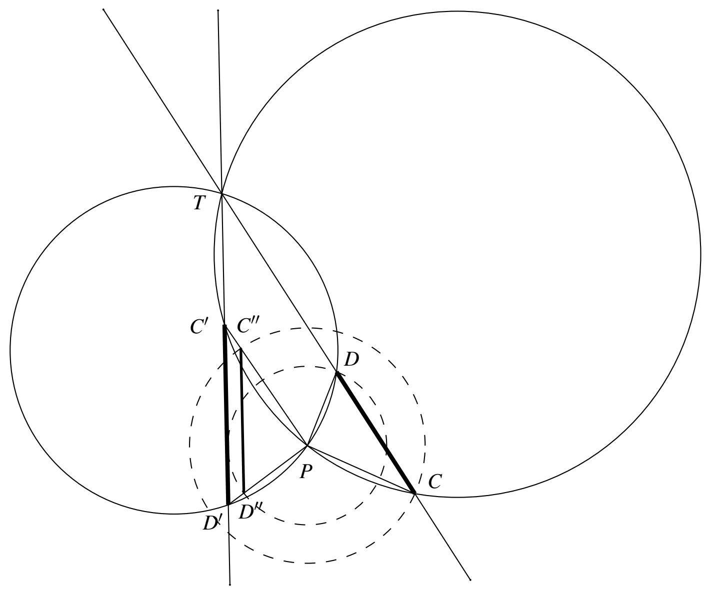
ABCD und $A'B'C'D'$ seien quadratische Landkarten, die zwar dieselbe Region zeigen aber in einem anderen Maßstab erstellt sind. Diese Karten werden wie in der Zeichnung aufeinander gelegt.
Zeige, dass es nur einen Punkt O auf der kleineren Landkarte gibt, der direkt über einem Punkt O' der großen Landkarte liegt, sodass O und O' denselben Ort in der Natur darstellen.
Gib außerdem eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für O an.



Zur Lösung der Aufgabe stellt sich das schon genannte Problem: Wie findet man den Drehpunkt derjenigen Drehstreckung, durch die eine vorgegebene Urbildstrecke AB auf eine vorgegebene Bildstrecke $A'B'$ abgebildet wird?
Dabei müssen verschiedene relative Lagen der Strecken berücksichtigt werden (gleichläufige oder gegenläufige Orientierung).

In den beiden nachfolgenden Figuren sind die fett gezeichneten Strecken AB und $A'B'$ bzw. CD und $C'D'$ jeweils vorgegeben. Gesucht wird der Fixpunkt (Drehpunkt) O bzw. P der Drehstreckung, durch die die Urbildstrecke in die Bildstrecke überführt wird.

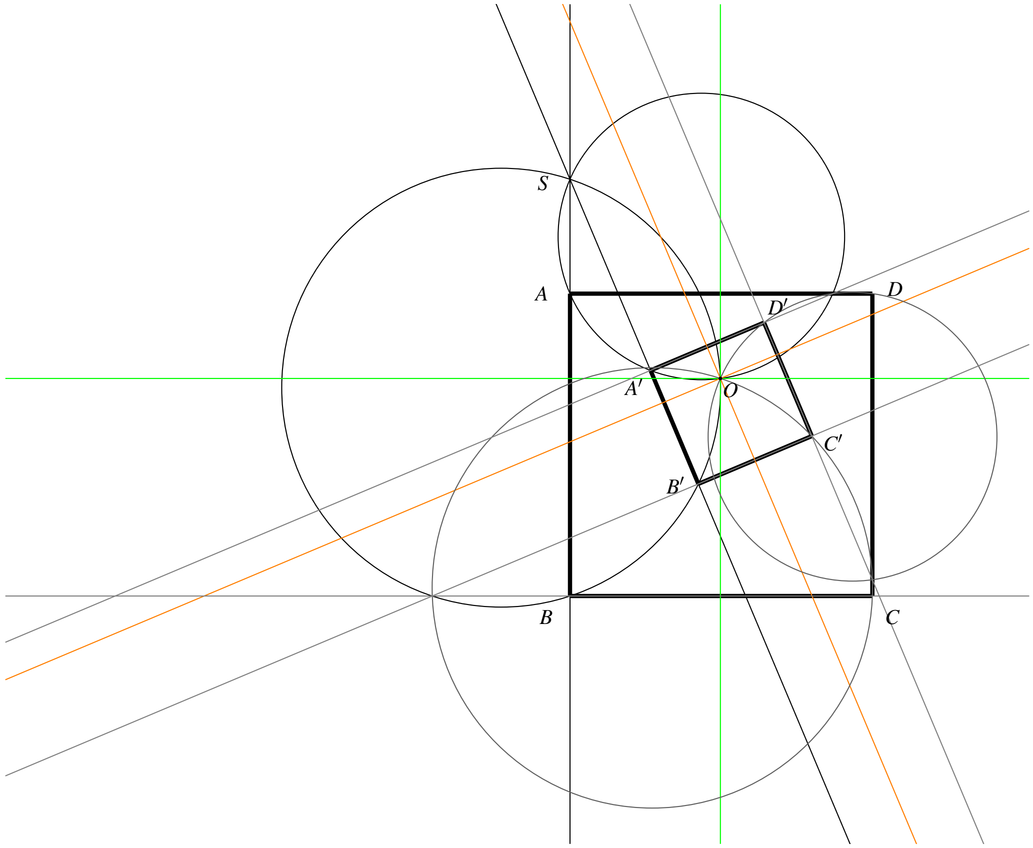




Konstruktionsbeschreibung zur linken Figur (gleichläufige Orientierung):
1. Verlängere die Strecken AB und $A'B'$ jeweils zur Geraden (AB) bzw. $(A'B')$; die Geraden schneiden sich im Punkt S.
2. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks $SA'A$ sowie den Umkreis des Dreiecks $SB'B$; die Umkreise schneiden sich außer in S in dem weiteren Punkt O, dem Fixpunkt der Drehstreckung.
3. Verbinde A' mit O und B' mit O.
4. Zeichne um O den Kreis mit dem Radius $|OA|$ (in Fig. gestrichelt); er schneidet $A'O$ im Punkt A''.
5. Zeichne um O den Kreis mit dem Radius $|OB|$ (in Fig. gestrichelt); er schneidet $B'O$ im Punkt B''.
6. Verbinde A'' mit B'' (in Fig. fett gezeichnet). Die Strecke $A''B''$ liegt nun parallel zur Strecke $A'B'$ und wird durch die Strahlen $[OA'$ und $[OB'$ zur Strecke $A'B'$ gestreckt.

Konstruktionsbeschreibung zur rechten Figur (gegenläufige Orientierung):
1. Verlängere die Strecken CD und $C'D'$ jeweils zur Geraden (CD) bzw. $(C'D')$; die Geraden schneiden sich im Punkt T.
2. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks $TC'C$ sowie den Umkreis des Dreiecks $TD'D$; die Umkreise schneiden sich außer in T in dem weiteren Punkt P, dem Fixpunkt der Drehstreckung.
3. Verbinde C' mit P und D' mit P.
4. Zeichne um P den Kreis mit dem Radius $|PC|$ (in Fig. gestrichelt); er schneidet $C'P$ im Punkt C''.
5. Zeichne um P den Kreis mit dem Radius $|PD|$ (in Fig. gestrichelt); er schneidet $D'P$ im Punkt D''.
6. Verbinde C'' mit D'' (in Fig. fett gezeichnet). Die Strecke $C''D''$ liegt nun parallel zur Strecke $C'D'$ und wird durch die Strahlen $[PC'$ und $[PD'$ zur Strecke $C'D'$ gestreckt.

Die eingangs zitierte Aufgabe wird durch die folgende Konstruktion gelöst:


S
A
D
D′
A′
O
C′
B′
B
C