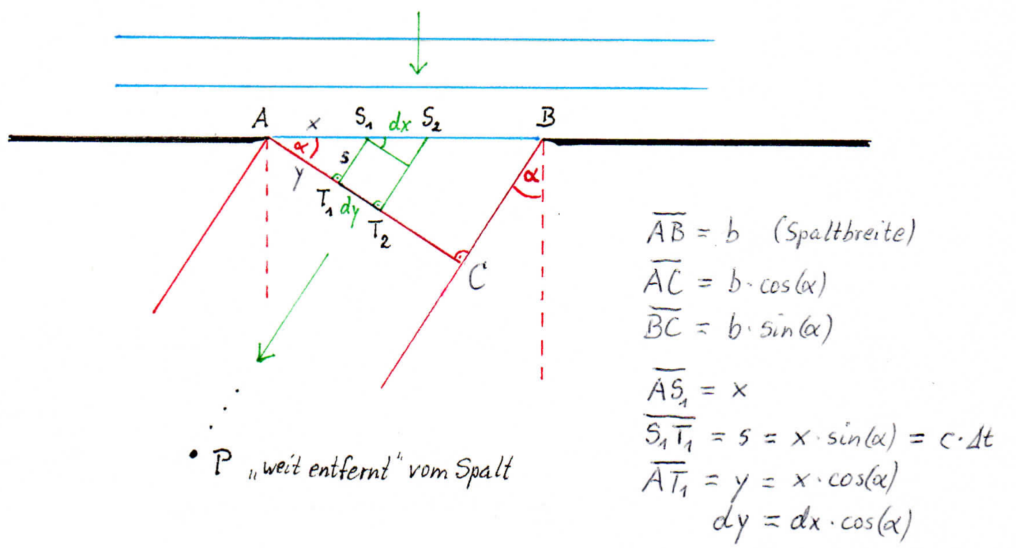
# Theorie zur Beugung am Spalt

Nach der Hypothese von CHRISTIAN HUYGENS (1629 - 1695) ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer neuen sogenannten Elementarwelle. Alle Punkte der Wellenfront $AB$ (vgl. Abb.) senden *gleichphasig* Elementarwellen aus. Im Gegensatz dazu schwingen in der Wellenfront $AC$ *nicht* mehr alle Punkte gleichphasig.




In der Spaltebene schwingen alle Punkte gemäß der Gleichung

$$\xi(0;t) = r \cdot \sin(\omega t),$$

und für diese Ebene ist der Winkel $\alpha = 0$ (im Bogenmaß!). Unter der Voraussetzung, dass sich die Amplituden der Elementarwellen längs der Strecke $BC$ *nur unwesentlich* ändern ($\alpha \approx 0$ im Bogenmaß!), ergibt sich für die Elongation $\xi_{T_1}$ am Ort $T_1$ im Querschnitt $AC$ zum Zeitpunkt $t$

$$\xi_{T_1}(s;t) = r \cdot \sin\left(\omega t - \omega \cdot \frac{s}{c}\right) = r \cdot \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c} \cdot \sin(\alpha)\right)\right)$$

Alle Wellenstrahlen des Querschnittes $AC$ weisen praktisch *parallel* zum „weit entfernten" punktförmigen Ort $P$, in dem sich alle Elementarwellen addieren (FRAUNHOFERsche Beugung). Man bildet daher die *Summe aller Elongationen im Querschnitt $AC$*, die bei hinreichend großer Anzahl schwingender Punkte $S_i$ durch das Integral ersetzt werden darf; dabei sei $T$ ein beliebiger Punkt von $AC$.

(Bei der folgenden Rechnung wird von den trigonometrischen Formeln

$$\cos(\phi) - \cos(\psi) = -2\sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(-\frac{\omega b}{2c} \cdot \sin(\alpha)\right) = -\sin\left(\frac{\omega b}{2c} \cdot \sin(\alpha)\right)$$

sowie von der Substitution $dy = dx \cdot \cos(\alpha)$ - damit $b$ statt $b \cdot \cos(\alpha)$ als obere Integrationsgrenze - Gebrauch gemacht.)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\overline{AC}} \xi_T(s;t) \cdot dy &= \int_0^{b\cdot\cos(\alpha)} r \cdot \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c} \cdot \sin(\alpha)\right)\right) \cdot dy \\
&= \int_0^b r \cdot \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c} \cdot \sin(\alpha)\right)\right) \cdot \cos(\alpha) dx \\
&= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(-\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\sin(\alpha)\right)\right)\right) \cdot \left(-\frac{c}{\omega \cdot \sin(\alpha)}\right)\Big|_{x=0}^{b} \\
&= \frac{c \cdot r}{\omega \cdot \tan(\alpha)}\left(\cos\left(\omega\left(t - \frac{b}{c}\sin(\alpha)\right)\right) - \cos(\omega t)\right) \\
&= \frac{2cr}{\omega}\cot(\alpha) \cdot \sin\left(\omega\left(t - \frac{b}{2c}\sin(\alpha)\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega b}{2c}\sin(\alpha)\right) \\
&= \xi_P(\alpha;t),
\end{aligned}$$

d. h. die Elongation zum Zeitpunkt $t$ hängt von der Richtung des gebeugten Lichtes ab.

Diskussion des Ergebnisses

a) Falls $\alpha = 0$ (im Bogenmaß!), so ist der entsprechende Anteil der Welle *ungebeugt* und deshalb hier auszuschließen.

b) Falls $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ist $\cot(\alpha) = 0$ und damit $\xi_P(\alpha; t) = 0$ zu *jedem* Zeitpunkt $t$.

c) Falls $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, so ist $\xi_P(\alpha; t) = 0$ zu *jedem* Zeitpunkt $t$ genau dann, wenn $\sin\left(\frac{\omega b}{2c} \cdot \sin(\alpha)\right) = 0$,
d. h. wenn $\frac{\omega b}{2c} \cdot \sin(\alpha) = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{N}$ ($k = 0$ ist auszuschließen, da sonst $\alpha = 0$ und keine Beugung vorläge).
Letzteres liefert

$$\sin(\alpha) = \frac{k\pi \cdot 2c}{\omega b} = \frac{2\pi \cdot kc}{2\pi\nu \cdot b} = \frac{k \cdot \lambda}{b} = \frac{2k}{b} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

als Bedingung für Lichtauslöschung („$k$-tes Minimum“; vgl. Skizze: $\overline{BC} = b \cdot \sin(\alpha) = k\lambda$).

**Ergebnis**
Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes trifft für sehr schmale Lichtbündel nicht mehr zu. Das Licht wird gebeugt. Im gebeugten, einfarbigen Licht entstehen durch Interferenz helle und dunkle Streifen.
Fällt eine ebene Welle mit der Wellenlänge $\lambda$ auf einen Spalt der Breite $b$, so werden die gebeugten Anteile in denjenigen Richtungen $\alpha$ ausgelöscht, für die gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{2k}{b} \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{„k-tes Minimum“.}$$

Maximale Helligkeit ergibt sich für diejenigen Richtungen $\alpha$, für die gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{2k+1}{b} \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{„k-tes Maximum“.}$$

Die vorstehende Herleitung ist im Sinne von HUYGENS korrekt; sie berücksichtigt aber nicht - was HUYGENS allerdings noch gar nicht wusste -, dass sich das Licht als nicht-skalare elektromagnetische Welle ausbreitet. Eine auf diese Tatsache gestützte Theorie der Lichtbeugung am Spalt hat erst GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824 - 1887) ausgearbeitet, die allerdings sehr kompliziert und verwickelt ist, so dass sie im gewöhnlichen Schulphysikunterricht nicht in Betracht kommt.

*Ulrich Warnecke,* 9. 12. 2008