Aufgaben zu Altersbestimmungen

Aufgabe 1
Ein Vater und seine Tochter sind zusammen 55 Jahre alt. Der Vater ist 25 Jahre älter als seine Tochter. Wie alt sind die beiden?

Lösung
Sei x das Alter der Tochter; dann beträgt das Alter des Vaters $x + 25$ Jahre, und es gilt jetzt

$$x + (x + 25) = 55.$$

Auflösung der Gleichung nach x:

$$\begin{aligned} 2x + 25 &= 55 \\ 2x &= 30 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Die Tochter ist 15 Jahre alt und ihr Vater 40 Jahre alt.
Man kann genauso gut mit dem Alter des Vaters beginnen; es sei mit z bezeichnet. Dann ist das Alter der Tochter $z - 25$ Jahre, und es gilt

$$z + (z - 25) = 55.$$

Auflösung nach z:

$$\begin{aligned} 2z - 25 &= 55 \\ 2z &= 80 \\ z &= 40. \end{aligned}$$

Der Vater ist 40 Jahre alt und die Tochter 15 Jahre alt - genau wie nach der vorigen Lösung.

Aufgabe 2
Eine Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter. In 5 Jahren wird die Mutter dreimal so alt wie ihre Tochter sein. Wie alt sind Mutter und Tochter heute?

Lösung

	heute	in 5 Jahren
Mutter	x	$x + 5$
Tochter	y	$y + 5$

Die Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter, also $x = 4y$. In 5 Jahren wird die Mutter nur noch dreimal so alt wie ihre Tochter sein: $x + 5 = 3(y + 5)$.

Setzt man gemäß der ersten Gleichung $4y$ an Stelle von x in die zweite Gleichung ein, so hat man

$$4y + 5 = 3(y + 5).$$

Auflösung nach y:

$$\begin{aligned} 4y + 5 &= 3y + 15 \\ y &= 10. \end{aligned}$$

Damit ist $x = 40$.
Die Mutter ist heute 40 Jahre alt und ihre Tochter 10 Jahre.

Aufgabe 3
Drei Schwestern sind zusammen 35 Jahre alt. Die älteste ist 5 Jahre älter als die jüngste, die jüngste 3 Jahre jünger als die mittlere Schwester. Wie alt sind die Schwestern?

Lösung
Sei x das Alter (in Jahren) der jüngsten Schwester; dann ist die mittlere Schwester $x+3$ Jahre alt und die älteste Schwester $x+5$ Jahre alt. Da die Schwestern zusammen 35 Jahre alt sind, gilt

$$x + (x+3) + (x+5) = 35.$$

Auflösung dieser Gleichung nach x:

$$\begin{aligned} 3x + 8 &= 35 \\ 3x &= 27 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Die jüngste Schwester ist 9 Jahre alt, die mittlere 12 Jahre alt und die älteste 14 Jahre alt.

Aufgabe 4
Ein Großvater ist 72 Jahre alt und seine Enkelin 18 Jahre. In wie vielen Jahren wird der Großvater dreimal so alt wie seine Enkelin sein?

Lösung

	heute	in x Jahren
Großvater	72	$72+x$
Enkelin	18	$18+x$

Da der Großvater in x Jahren dreimal so alt wie seine Enkelin sein soll, gilt (s. Tabelle):

$$72 + x = 3(18 + x).$$

Auflösung nach x liefert:

$$\begin{aligned} 72 + x &= 54 + 3x \\ 18 &= 2x \\ x &= 9 \end{aligned}$$

In 9 Jahren wird der Großvater dreimal so alt wie seine Enkelin sein.

Aufgabe 5
Ein Onkel ist doppelt so alt wie seine beiden Neffen zusammen. Vor 2 Jahren war er viermal so alt wie der ältere Neffe, und vor 4 Jahren war er sechsmal so alt wie der jüngere Neffe. Wie alt sind die drei Personen jetzt?

Lösung

	jetzt	vor 2 Jahren	vor 4 Jahren
Onkel	x	$x-2$	$x-4$
älterer Neffe	y	$y-2$	
jüngerer Neffe	z		$z-4$

Der Tabelle in Verbindung mit dem Aufgabentext entnimmt man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= 2(y+z) \\ x - 2 &= 4(y-2) \\ x - 4 &= 6(z-4) \end{aligned}$$

Auflösung der zweiten und dritten Gleichung nach y bzw. z ergibt

$$y = \frac{1}{4}(x+6) \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1}{6}(x+20)$$

und Einsetzung in die erste der drei Gleichungen

$$x - \frac{1}{2}(x+6) - \frac{1}{3}(x+20) = 0.$$

Diese Gleichung wird jetzt mit 6 multipliziert und dann nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} 6x - 3(x+6) - 2(x+20) &= 0 \\ 6x - 3x - 18 - 2x - 40 &= 0 \\ x - 58 &= 0 \\ x &= 58 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $y = \frac{1}{4}(58+6) = 16$ bzw. $z = \frac{1}{6}(58+20) = 13$.
Der Onkel ist jetzt 58 Jahre alt, und seine beiden Neffen sind jetzt 16 bzw. 13 Jahre alt.

Aufgabe 6
Ermittle die Lebensalter der Personen.
a) Von einem Ehepaar mit zusammen 49 Lebensjahren ist er heute doppelt so alt, wie sie war, als er so alt war, wie sie war, als er so alt war, wie sie jetzt ist.
b) Ein Vetter ist heute doppelt so alt, wie seine Cousine war, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Vor 19 Jahren waren sie zusammen halb so alt, wie sie zusammen in 11 Jahren sein werden.
c) Theo ist zweimal so alt, wie Ria war, als er ein Jahr älter war, als sie heute ist. Aber Ria ist halb so alt, wie Theo sein wird, wenn sie ein Jahr älter ist, als er heute ist.

Lösung
a) Erste Lösung mit 3 Variablen.

	vor z Jahren	heute
Ehemann	$x - z$	x
Ehefrau	$y - z$	y

Dem Aufgabentext zusammen mit nebenstehender Tabelle entnimmt man als Ansatz folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 49 \\ x &= 2(y - z) \\ x - z &= y \end{aligned}$$

Dieses System wird gelöst durch $x = 28,\ y = 21,\ z = 7$.
Der Ehemann ist heute 28 Jahre alt und seine Frau 21 Jahre.

Zweite Lösung mit nur zwei Variablen.

	früher	heute
Ehemann	y	x
Ehefrau	$\frac{1}{2}x$	y

Hier sind Angaben des Aufgabentextes schon in die Tabelle eingearbeitet. Da die Differenz der Lebensalter von Ehemann und Ehefrau zu jedem Zeitpunkt die gleiche bleibt, findet man jetzt als Ansatz:

$$\begin{aligned} x + y &= 49 \\ y - \frac{1}{2}x &= x - y \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = 28,\ y = 21$ und der gleichen Antwort wie zuvor.

b) Erste Lösung mit drei Variablen.

	vor 19 Jahren	früher	heute	in 11 Jahren
Vetter	$x-19$	$x-z$	x	$x+11$
Cousine	$y-19$	$y-z$	y	$y+11$

Wieder gewinnt man aus Aufgabentext und Tabelle den Ansatz:

$$x = 2(y-z)$$
$$x - z = y$$
$$2\left((x-19)+(y-19)\right) = (x+11)+(y+11)$$

Dieses System wird gelöst durch $x = 56,\ y = 42,\ z = 14$. Der Vetter ist 56 Jahre alt und seine Cousine 42 Jahre.

Zweite Lösung mit nur zwei Variablen.

	vor 19 Jahren	früher	heute	in 11 Jahren
Vetter	$x-19$	y	x	$x+11$
Cousine	$y-19$	$\frac{1}{2}x$	y	$y+11$

Unter Beachtung der konstant bleibenden Differenz der Lebensalter zu jedem Zeitpunkt ergibt sich hier der kürzere Ansatz:

$$y - \frac{1}{2}x = x - y$$
$$2\left((x-19)+(y-19)\right) = (x+11)+(y+11)$$

Die Lösung dieses Systems ist $x = 56,\ y = 42$ mit gleicher Antwort wie zuvor.

c) Man kann hier mit vier Variablen arbeiten (x, y für Theos bzw. Rias Alter; z, w zur Darstellung von „früher“ bzw. „später“) oder aber die Angaben der Aufgabenstellung sofort in eine Tabelle einarbeiten:

	früher	heute	später
Theo	$y+1$	x	$2y$
Ria	$\frac{1}{2}x$	y	$x+1$

Wieder unter Beachtung der konstant bleibenden Differenz der Lebensalter zu jedem Zeitpunkt ergibt sich der Ansatz:

$$(y+1) - \frac{1}{2}x = x - y$$
$$2y - (x+1) = x - y$$

Auflösung des Systems liefert $x = 10$, $y = 7$. Theo ist 10 Jahre und Ria 7 Jahre alt.

Aufgabe 7
Ermittle jeweils das Alter der Personen.
a) Als Carl nach dem Alter seiner Schwester gefragt wurde, antwortete er: „Marias Alter ist 1 mehr als das Achtfache der Summe seiner Ziffern.“
b) Ein Mathematiker antwortete auf die Frage nach dem Alter seiner Söhne: „Das Alter jedes von Beiden ist 1 mehr als als die dreifache Summe ihrer Ziffern.“

Lösung
a) Marias Alter werde gegeben durch $10a + b$, wobei $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$. Dann hat man sofort

$$10a + b = 8(a+b) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 7b = 1.$$

Die rechts stehende Gleichung wäre unter Voraussetzung von $a, b \in \mathbb{Z}$ eine diophantische Gleichung mit der Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(a; b) \,|\, a = -3 + 7r,\ b = -1 + 2r,\ r \in \mathbb{Z}\},$$

die man so z. B. mittels euklidischem Algorithmus finden kann. Die Forderung, dass a, b nur für Ziffern stehen dürfen, ist jedoch nur für $r = 1$ erfüllt, so dass die einzige Lösung hier durch $a = 4$, $b = 1$ gegeben wird, d. h. Maria ist 41 Jahre alt.

In Betracht zu ziehen ist auch die Möglichkeit, dass Maria ihr hundertstes Lebensjahr überschritten haben könnte. Dann hätte man mit $a, b, c \in \{0; 1; \ldots; 9\}$

$$100a + 10b + c = 8(a + b + c) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 92a + 2b - 7c = 1.$$

Damit die rechte Gleichung als diophantische Gleichung aufgefasst überhaupt gelöst werden kann, muss c wegen $2(46a + b) - 1 = 7c$ ungerade sein; das bedeutet $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Untersucht man für diese Fälle die Gleichung auf Lösbarkeit, stellt man fest, dass nur für $c = 1$ die Gleichung bzgl. der Ziffernmenge lösbar ist; man hat dann

$$92a + 2b = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 46a + b = 4,$$

und hier wird die rechte Gleichung in der Ziffernmenge nur durch $a = 0$, $b = 4$ gelöst. Marias Alter ist dann $100 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + 1 = 41$ Jahre – wie zuvor.

b) Hier darf man wohl von vornherein voraussetzen, dass das Lebensalter der beiden Söhne niedriger als 100 Jahre ist, und hat dann sofort mit $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$

$$10a + b = 3(a + b) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7a - 2b = 1.$$

Als diophantische Gleichung aufgefasst hätte man hier als Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(a; b) \mid a = 1 + 2r,\ b = 3 + 7r,\ r \in \mathbb{Z}\}.$$

Das einzige Ziffernpaar ergibt sich hier aber nur für $r = 0$, also $(a; b) = (1; 3)$. Die Söhne sind demnach 13 Jahre alt, also gleich alt.

Aufgabe 8

Wie alt sind die im Folgenden genannten Personen?
a) Eine Mutter ist so alt wie ihre beiden Töchter zusammen. Die Summe aller Alter ist eine zweistellige Zahl. Das Alter der einen Tochter besteht aus zwei Ziffern, die bei Vertauschung das Alter der Mutter ergeben. In 39 Jahren ergeben die vertauschten Ziffern des Alters der Mutter das heutige Alter der anderen Tochter.
b) Eine Großmutter behauptet von sich, ihrer Tochter und ihrer Enkelin: „Meine Tochter ist 24 Jahre jünger als ich und 35 Jahre älter als meine Enkelin. Zusammen sind wir 100 Jahre alt.

Lösung

a) Sei $10a + b$ mit $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ und $a > b$ das Alter der Mutter; dann beträgt das Alter der einen Tochter $10b + a$ Jahre, das Alter der anderen Tochter $(10a + b) - (10b + a)$ Jahre, das man im Hinblick auf Ziffernvergleich bzw. Ziffertausch auch so schreiben kann:

$$(10a+b)-(10b+a) = 10(a-b)+(b-a) = 10(a-b)-10+(\underbrace{10+(b-a)}_{\text{stellt eine Ziffer dar}}) = 10(a-b-1)+(10+(b-a)).$$

In 39 Jahren ist das Alter der Mutter

$$10a + b + 39 = 10a + b + 40 - 1 = 10(a + 4) + (b - 1).$$

Ziffertausch ergibt $10(b - 1) + (a + 4)$, und dies soll gleich dem Alter der anderen Tochter sein, also

$$10(b - 1) + (a + 4) = 10(a - b - 1) + (10 + (b - a)).$$

Vergleich der Zehner- bzw. Einerziffern liefert

$$\begin{aligned} b - 1 &= a - b - 1 \\ a + 4 &= 10 + (b - a) \end{aligned}$$

und dieses System wird gelöst durch $a = 4$, $b = 2$.
Die Mutter ist 42 Jahre alt, die eine Tochter 24 Jahre und die andere 18 Jahre.

b) Sei x das Alter der Tochter; dann ist

$$(x + 24) + x + (x - 35) = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = 37.$$

Das Alter der Großmutter der ist 61 Jahre, das der Tochter 37 Jahre und das der Enkelin 2 Jahre.

Aufgabe 9
Ermittle das Alter.
a) Mein Urgroßvater, der am Ende des 19. Jahrhunderts geboren wurde, war x Jahre alt im Jahr x^2.
b) Ein Vater sagt. „Mein Sohn ist im Jahr 2004 so alt wie die Quersumme seines Geburtsjahres.“

Lösung
Die einzige Quadratzahl zwischen 1900 und 1999 ist $1936 = 44^2$; daher ist $1936 - 44 = 1892$ das Geburtsjahr, und im Jahr 1936 ist der Urgroßvater 44 Jahre alt.

b) Sei $1900 + (10a + b)$ mit $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ das Geburtsjahr des Sohnes, dessen Alter dann gegeben wird durch $2004 - (1900 + 10a + b)$. Das Alter soll gleich der Quersumme de Geburtsjahres sein, also

$$2004 - (1900 + 10a + b) = 1 + 9 + a + b \quad \Leftrightarrow \quad 11a + 2b = 94.$$

Die rechte Gleichung – aufgefasst als diophantische Gleichung – ist lösbar, da $\mathrm{ggT}(11; 2) = 1$ ein Teiler von 94 ist. Es ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 \cdot \underbrace{1}_{a_0} + 2 \cdot \underbrace{(-5)}_{b_0} \\ 94 &= 11 \cdot (94 \cdot 1) + 2 \cdot (94 \cdot (-5)) \\ a_1 &= 94 \cdot 1 = 94 \\ b_1 &= 94 \cdot (-5) = -470 \\ a &= a_1 + 2r = 94 + 2r \\ b &= b_1 + (-11)r = -470 - 11r \end{aligned}$$

Nur für $r = -43$ erhält man hier für $(a; b)$ ein Ziffernpaar, nämlich $(8; 3)$. Der Sohn wurde demnach 1983 geboren.

Bemerkung. Natürlich kann man $(8; 3)$ als Lösung von $11a + 2b = 94$ durch Raten finden. Damit ist aber nicht bewiesen, dass dieses Lösungspaar das einzig mögliche ist.

Aufgabe 10 (aus: Mathematik für jung und alt, Aufgabe 94-65)
Mein Bruder ist im Jahre $x \cdot y$ geboren. Im Jahre x^2 wird er x Jahre und im Jahre $(x + 1) \cdot y$ wird er y Jahre alt sein. Wie alt war mein Bruder im Jahre $x^2 + y^2 - xy$?

Lösung
Im Jahre x^2 wird der Bruder x Jahre alt sein, d. h.

$$x \cdot y + x = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = y + 1.$$

Schließt man - was vernünftig erscheint - den Fall $x = 0$ aus und nimmt $x \geq 1$ an, so bleibt $y = x - 1$. Auch die Voraussetzung $y \geq 1$ erscheint jetzt sinnvoll (obwohl rein mathematisch nicht zwingend). Nun findet man für das Alter des Bruders im Jahre $x^2 + y^2 - xy$

$$(x^2 + y^2 - xy) - xy = (x - y)^2 = (x - (x - 1))^2 = 1.$$

Der Bruder war in dem Jahr also 1 Jahr alt. (Für die Lösung brauchte man das Geburtsjahr überhaupt nicht zu kennen. Es handelt sich hier um eine hübsche algebraische Verkleidung der Zahl 1.)